ECG
MATHS APPLIQUÉES

À VOS MATHS

12 ANS *de sujets*

posés au concours EDHEC
exercices et problèmes corrigés

11e édition actualisée + Python

CONSEILS de MÉTHODE
CONSEILS de RÉDACTION
AIDE à la RÉSOLUTION
LISTE DES FAUTES à ÉVITER
CONTRE-EXEMPLES SIMPLES

Sylvain RONDY

ellipses

Avant-propos

Voici la onzième édition de À VOS MATHS : elle contient les épreuves du concours EDHEC posées entre 2014 et 2025, toutes adaptées au nouveau programme entré en vigueur à la rentrée 2021 et opérationnel dès le concours 2023. Chaque énoncé est suivi de conseils (méthode, rédaction, etc.), ainsi que de son corrigé et du barème.
Les corrigés sont rédigés de façon très détaillée (ils ne sont pas des modèles de copie car ils contiennent des indications destinées à bien faire comprendre au lecteur comment se dessine la solution) et la rubrique de conseils est très fournie : conseils de méthode, conseils de rédaction, aide à la résolution et liste des fautes à éviter, assortie de contre-exemples simples.
Cet ouvrage n'est donc pas un simple recueil d'annales mais un outil précieux d'aide à la réflexion.

Outre la table des matières, le lecteur trouvera au début de cet ouvrage plusieurs tableaux assez utiles : un tableau thématique indiquant dans quelle épreuve on peut trouver tel ou tel thème, un tableau permettant de repérer les exercices accessibles aux étudiants de première année, et enfin un tableau proposant un timing pour chaque épreuve.

Cet ouvrage est destiné en tout premier lieu aux élèves des classes préparatoires aux grandes écoles de commerce et de management de l'option mathématiques appliquées, qu'ils soient en première ou en deuxième année, mais pourra également intéresser les étudiants de L1-L2 dont le cursus contient des mathématiques.

L'épreuve de mathématiques du concours d'entrée à l'EDHEC est présentée par un très grand nombre de candidats, c'est l'une des épreuves comptant le plus grand nombre d'inscrits (elle est également choisie par AUDENCIA et GEM). C'est donc une épreuve incontournable à laquelle presque tous les candidats doivent se préparer.
Sa structure (trois exercices et un problème) est la garantie qu'une grande partie des connaissances exigibles en fin de classe préparatoire y est abordée chaque année : elle est donc idéale, que ce soit pour une remise à niveau ou pour un approfondissement des connaissances et des techniques de résolution.

On peut envisager deux façons de travailler avec cet ouvrage : un travail thématique (voir le tableau correspondant) permettant de mettre au point les méthodes attachées au thème choisi, ou un travail en temps réel consistant à se

donner entre quatre et six heures pour traiter une épreuve entière afin de s'évaluer, par exemple, pendant les révisions de fin d'année.
Dans les deux cas, lorsqu'une question n'est pas traitée, il faut lire en priorité les conseils de méthode et, si cela ne suffit pas, consulter l'aide à la résolution, puis, en dernier lieu, lire le corrigé. Pour chaque question traitée, il est prudent de consulter les conseils de rédaction, afin de vérifier que l'on a pensé à tout, et aussi la rubrique « Les fautes qu'il ne fallait pas faire » car on peut parfois trouver le bon résultat en commettant des erreurs ou même des fautes graves.
L'épreuve est très longue (très peu de candidats la traitent intégralement) mais elle permet, par la diversité des exercices proposés, à chaque candidat de s'exprimer.
Dans l'optique du concours, il faut savoir que le barème appliqué chaque année permet d'obtenir une excellente note sans pour autant avoir traité l'intégralité de l'épreuve. L'essentiel est de ne pas quitter la salle d'examen en regrettant de ne pas avoir eu le temps de faire (ou même de lire) une question : il ne faut donc pas s'accrocher trop longtemps sur une question qui résiste afin de se laisser le temps de pouvoir tout aborder. Il est cependant inutile de donner des réponses sans preuve, ceci fait peut-être gagner du temps mais ne rapporte assurément aucun point.
J'espère très sincèrement que ce livre sera utile à tous les futurs candidats aux épreuves des concours d'accès aux écoles de commerce et de management.

Je remercie Corinne Baud, des éditions Ellipses, pour ses conseils et sa volonté d'éditer cet ouvrage pour la onzième fois.
Je remercie également Nadia et Georges pour leur soutien et leur relecture attentive.

Le lecteur est invité à me faire part de ses remarques à l'adresse ci-dessous. De notre correspondance naîtra un peu plus de lumière !

sylvain.rondy@hotmail.fr

Table des matières

Tableau thématique

Année	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
ANALYSE												
Suites récurrentes			EX2									
Suites implicites	EX1				EX1					EX2		
Suites intégrales		EX1		EX3		PB	EX3	PB				
Séries				EX3		PB	EX3	PB		PB	PB	
Dérivabilité, classe			EX2					PB		EX2		EX2
Étude de fonctions	EX1			EX3 PB				PB				EX1
Th. de la bijection	EX1				EX1					EX2		EX1
Équas diff		EX3	PB									
Équivalents, DL		EX1			EX1	PB	EX3	PB		EX2		EX2
Acc. finis			EX2									
Calcul intégral		EX1		PB			EX3	PB	EX2		EX3	
Encadrer une intégrale	PB	EX1				PB	EX3			PB	PB	
Fonctions intégrales		EX3		PB				PB		EX2		EX2
Intégrales impropres											EX3	
Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$					EX1				EX1		EX3	
INFORMATIQUE												
Suites, matrices	EX2	EX1	EX2	EX1 EX3	EX3	PB	EX3		EX2	EX2	EX1	
Courbes, surfaces									EX1			
Simulation, probas	EX3 PB	EX2	EX3 PB	EX2	PB	EX2 EX3	EX2 PB	EX2 EX3	EX3 PB	EX3 PB	EX2 PB	EX3 PB
Calcul approché								PB				
ALG LINÉAIRE												
Formule du binôme							EX1		PB			
Matrice inverse							EX1	EX1		EX1		
Réduction (matrices)	EX2	PB	EX1 EX3	EX1	EX3					EX1	EX1	EX1
Graphes			EX1									
EV, endos	EX2			EX1		EX1	EX1	EX1	EX2			EX1
Noyaux, images				EX1	EX3	EX1	EX1	EX1			EX1	
Polynôme annulateur		PB		EX1	EX3		EX1			EX1		
PROBABILITÉS												
VA discrètes	PB		EX3	EX2	PB	EX3	EX2	EX2		PB	PB	EX3
Lois conditionnelles	PB	PB				EX3				PB	PB	
Σ de VA discrètes								EX2				
Chaînes de Markov		PB							PB			
VA à densité	EX3	EX2	PB	PB	EX2	EX2	PB	EX3	EX3	EX3	EX2	PB
Fonction de VA	EX3	EX2			EX2	EX2			EX3	EX3	EX2	PB
Convergences	EX3	EX2		EX2 PB	EX2				EX3			
Estimation						EX2	PB	EX3				EX3

Accès aux étudiants de première année

Ce tableau précise quels exercices (ou parties d'exercices) peuvent être traités par des étudiants de première année, ce qui ne signifie pas qu'ils sont forcément faciles.

	Exercice 1	Exercice 2	Exercice 3	Problème
2025	**Oui**			**Oui**
2024	**sauf q 4c), 5a)**		**Oui**	
2023	**q 1, 2, 3a, 3b**	**q 1–3, 6a,b,c**		
2022		**sauf q 5)**	**sauf q 3)**	**parties 1, 3**
2021			**q 3–5**	
2020				**q 1–8**
2019	**q 1, 2**	**q 1, 2**	**sauf 3abc), 5c)**	
2018		**q 1–4**		**q 1–3**
2017				
2016		**q 1, 2**		**q 1, 2**
2015				**partie 1**
2014		**sauf q 6)**	**sauf q 3)**	

Proposition de timing

Ce tableau donne une indication du temps qu'il faut passer sur chaque exercice d'une épreuve, en admettant que l'on y consacre quatre heures.
Cela dit, tant que tout se passe bien au cours de la résolution d'un exercice, il faut continuer et, éventuellement, dépasser le temps indiqué (il serait en effet dommage de ne pas traiter des questions que l'on sait résoudre sous prétexte de respecter son tableau de marche).
Au contraire, si un exercice paraît peu inspirant, ou même inaccessible, il ne faut pas perdre inutilement son énergie et son temps à vouloir le traiter : mieux vaut le garder pour la fin s'il reste du temps.

	Exercice 1	**Exercice 2**	**Exercice 3**	**Problème**
2025	**1 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 1/2**
2024	**3/4 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h**
2023	**3/4 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h**
2022	**3/4 h**	**1/2 h**	**1 h**	**1 h 3/4**
2021	**1/2 h**	**1 h**	**1 h**	**1 h 1/2**
2020	**3/4 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 3/4**
2019	**1/2 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**2 h**
2018	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h**	**1 h 1/2**
2017	**1/2 h**	**1/2 h**	**1 h 1/4**	**1 h 3/4**
2016	**3/4 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h**
2015	**3/4 h**	**3/4 h**	**3/4 h**	**1 h 3/4**
2014	**3/4 h**	**3/4 h**	**1/2 h**	**2 h**

Sujet 2025

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `numpy.linalg` de `Python` sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1 ....

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k$$

1) a) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.

c) Donner la valeur de u_1.

2) a) Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

b) En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geq 1$.

c) Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

3) a) Pour tout réel $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de x et de n.

b) En déduire que, pour tout réel x différent de 1, on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1} = \frac{n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(1-x)^2}$$

c) Donner alors une expression sans symbole Σ de $f_n(x)$ pour $x \in [0,1[$.

4) a) Déterminer u_2 puis en déduire que, si n est supérieur ou égal à 2, on a :

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}$$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, u_n^n$.

c) En revenant à la définition de u_n, montrer, pour $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = n\, u_n^{n+2} - (n+1)\, u_n^{n+1}$$

d) Donner finalement la valeur de ℓ.

Exercice 2 ....

On note E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

1) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Donner une base de E et en déduire sa dimension.

2) Justifier sans calcul que les matrices de E sont diagonalisables mais pas inversibles.

Dans toute la suite, sauf la dernière question, on étudie un exemple.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Vérifier que A appartient à E.

4) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `matA()` retournant la matrice A.

5) a) Quelle valeur propre de A la question 2) permet-elle d'obtenir ?

b) Montrer que les matrices $A-5I$ et $A+4I$ ne sont pas inversibles. En déduire deux autres valeurs propres de A.

c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A puis construire une base (U,V,W) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (on prendra pour chacun d'entre eux la première composante égale à 1).

6) On considère les instructions `Python` suivantes :

```
r1=al.matrix_rank(matA()-5*np.eye(3,3))
r2=al.matrix_rank(matA()+4*np.eye(3,3))
print('r1=',r1)
print('r2=',r2)
```

Utiliser la question précédente pour donner les valeurs de r_1 et r_2 renvoyées par ce script.

7) a) Vérifier que les vecteurs U, V et W sont vecteurs propres de toutes les matrices de E.

b) Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs U, V et W, indiquer comment obtenir la puissance n-ième de n'importe quelle matrice de E (seule la démarche est exigée, les calculs et leurs résultats numériques ne sont pas demandés).

c) En déduire, sans la commande `al.matrix_power`, et toujours pour $n\in\mathbb{N}^*$, une fonction `Python` d'en-tête `puissanceM(a,b,n)` renvoyant $M(a,b)^n$.

Exercice 3 ....

On suppose que les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

Soit f_n la fonction définie par : $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1) Vérifier que f_n est une densité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier naturel n non nul, X_n admet f_n comme densité.

2) a) Justifier que $E\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)$ et $E\left(\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existent et donner leur expression en fonction de n.

b) En déduire que X_n possède une espérance et une variance et donner leur expression en fonction de n.

3) Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

4) a) Donner, pour tout réel x strictement négatif, la limite de $F_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Soit x un réel positif. Montrer que, pour tout entier $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$, on a :

$$F_n(x) = 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

c) Pour tout réel x positif, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X dont on donnera la loi.

5) Soit $U_1,\dots,U_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$.

On considère la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \min(U_1,\dots,U_n)$, ce qui signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $M_n(\omega)$ est le plus petit des réels $U_1(\omega),\dots,U_n(\omega)$.

Enfin, on pose $Z_n = n M_n$.

a) En notant G la fonction de répartition commune à $U_1,\dots,U_n$, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x<0$, $0 \leq x \leq 1$ ou $x>1$.

b) Déterminer, pour tout réel x, la probabilité $P(Z_n > x)$ à l'aide de la fonction G et en déduire explicitement la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

c) Conclure que Z_n suit la même loi que X_n.

d) Utiliser la question 5c) pour écrire une fonction `Python` renvoyant une réalisation de X_n.

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de $n+1$ urnes, numérotées de 1 à $n+1$, et contenant chacune n boules.
Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, l'urne numéro k contient $k-1$ boules noires, les autres boules étant blanches (ainsi, l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches et l'urne numérotée $n+1$ ne contient que des boules noires).
L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à y effectuer indéfiniment des tirages au hasard d'une boule, avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient après chaque tirage.
Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, on note U_k l'événement : « On a choisi l'urne numérotée k ».
On appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient aucune boule blanche au cours de l'épreuve et qui prend la valeur j ($j \in \mathbb{N}^*$) si la première boule blanche apparaît au $j^{\text{ième}}$ tirage.

Pour finir, on rappelle les commandes `Python` suivantes qui permettent de simuler certaines variables discrètes usuelles :
`rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.
`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
`rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) Simulation de X_n : pour tout j de $[\![2,n+1]\!]$, on code les $j-1$ boules noires de l'urne numéro j par les entiers de $[\![1,j-1]\!]$. Compléter alors la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par X_n lors de l'épreuve aléatoire décrite ci-dessus :

```
def varX(n):
    k=------# choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=------
    elif k==1:
        X=------
    else:
        X=1
        while rd.randint(1,n+1)<=------:
            X=--------
    return(X)
```

2) Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, déterminer $P(U_k)$.

3) a) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k.

b) En conservant, sans les écrire de nouveau, les 6 premières lignes de la fonction `Python` précédente, compléter les 3 lignes suivantes afin d'obtenir une nouvelle simulation de X_n :

```
else:
    X=-------
return(X)
```

4) a) Déterminer $P_{U_{n+1}}\left(X_n=1\right)$.

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner $P_{U_k}\left(X_n=1\right)$.

c) Montrer alors que $P(X_n=1)=\dfrac{1}{2}$.

5) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer $P_{U_{n+1}}\left(X_n=j\right)$.

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner $P_{U_k}\left(X_n=j\right)$.

c) En déduire l'égalité : $P\left(X_n=j\right)=\dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$.

6) a) Justifier que, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]=\frac{k}{n}$.

b) Calculer $P\left(X_n\geq 2\right)$ en fonction de n.

7) a) Déduire des deux questions précédentes l'expression de $P\left(X_n=0\right)$ en fonction de n.

b) Aurait-on pu anticiper ce dernier résultat sans aucun calcul ?

8) a) Montrer que X_n possède une espérance donnée par : $E\left(X_n\right)=\dfrac{n}{n+1}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

b) Informatique : calcul et affichage de $E\left(X_n\right)$.

Compléter le script suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher $E\left(X_n\right)$:

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=------
print(E)
```

9) a) Montrer que : $\forall p\in\mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{p+1}\leq\displaystyle\int_p^{p+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\leq\frac{1}{p}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, l'encadrement : $\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p}\leq\ln(n)\leq\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$.

c) Établir enfin l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

d) Utiliser l'encadrement précédent pour donner l'équivalent le plus simple possible de $E(X_n)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

Conseils 2025

Exercice 1 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Dériver est la méthode la plus simple pour avoir les variations.

b) C'est une situation typique d'utilisation du théorème de la bijection.

c) Il suffit de résoudre $f_1(x)=1$.

2) a) Il y a seulement un terme de plus dans la somme définissant $f_{n+1}(x)$ que dans celle définissant $f_n(x)$.

b) Appliquer l'inégalité obtenue en 2a) avec $x=u_n$.

c) Par définition de u_{n+1}, on a $f_{n+1}(u_{n+1})=1$ et l'inégalité $f_{n+1}(u_n)\geq 1$ s'écrit $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$.

d) Ici aussi, c'est typique d'un théorème bien pratique : le théorème de limite monotone.

3) a) C'est du cours de première année (et même de première et terminale).

b) La somme $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ est la dérivée de la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} x^k$, mais c'est aussi la dérivée de la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ (le terme d'indice 0 vaut 1 donc sa dérivée est nulle), ce qui simplifie un peu les choses.

c) Pour tout x de $[0,1]$, on a $f_n(x)=x\sum\limits_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ et ensuite, si x est dans $[0,1[$, on peut remplacer $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ grâce à la question 3b).

4) a) Pour avoir u_2, il suffit de résoudre $f_2(x)=1$. Ensuite, les variations de la suite (u_n) permettent d'obtenir la majoration de u_n pour $n\geq 2$.

b) Il est pertinent d'encadrer u_n^n et $n\,u_n^n$ grâce à la question précédente.

c) Il faut travailler sur l'égalité $f_n(u_n)=1$ en utilisant la question 3c).

d) L'idée consiste à passer à la limite dans l'égalité obtenue à la question 4c).

❖ Conseils de rédaction

1) a) Il est bien de préciser que f_n est dérivable car polynomiale. Pour montrer que $f_n'(x)>0$, il faut signaler que $k\geq 1>0$ et $x\geq 0$ mais il en faut un peu plus pour avoir la stricte croissance de f_n.

b) Pour conclure, il faut vraiment **prouver** que $f_n(0)\leq 1\leq f_n(1)$: l'inégalité de gauche est évidente, et l'autre l'est moins, donc il faut un peu détailler.

2) b) Ça ne coûte pas grand-chose de préciser que $u_n\geq 0$ pour justifier que l'on a $1+(n+1)u_n^{n+1}\geq 1$

c) Ayant $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$, c'est la **stricte** croissance de f_{n+1} qui permet de conclure. En effet, la définition de la stricte croissance de f_{n+1} s'écrit :

$$u_n<u_{n+1}\Rightarrow f_{n+1}(u_n)<f_{n+1}(u_{n+1})$$

En contraposant, on obtient :

$$f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})\Rightarrow u_n\geq u_{n+1}$$

3) a) La condition $x\neq 1$ est essentielle.

b) Il est bien de citer la linéarité de la dérivation pour dériver $x\mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k$.

c) La fonction f_n est certes définie sur $[0,1]$, mais pour utiliser la question 3b), il faut avoir $x\neq 1$ donc on obtient une égalité qui n'est vraie que sur $[0,1[$.

4) a) Ne pas oublier qu'il y a deux solutions à une équation du second degré donc il faut trouver une condition vérifiée par u_2 pour choisir la bonne.

b) Il vaut mieux citer la croissance de la fonction $x\mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ pour passer de $0\leq u_n\leq \frac{1}{2}$ à $0\leq u_n^n\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

c) Il faut justifier qu'on peut utiliser la question 3c) en remplaçant x par u_n, donc il faut préciser que $u_n\neq 1$.

d) Ici aussi, l'équation $\ell^2-3\ell+1=0$ possède deux solutions et seule l'une d'entre elles est recevable.

❖ Aide à la résolution

1) a) Pour le signe de $f_n'(x)$, ne pas oublier que x appartient à $[0,1]$.

c) La somme définissant $f_1(x)$ ne contient qu'un seul terme.

2) a) On a $f_{n+1}(x)=f_n(x)+(n+1)x^{n+1}$.

b) Ayant obtenu $f_{n+1}(u_n)\geq f_n(u_n)$, il faut se souvenir que $f_n(u_n)=1$.

3) b) Pour conclure, il suffit de dériver correctement $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

4) a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ décroît donc, pour tout entier naturel $n\geq 2$, on a $u_n \leq u_2$.

b) Pour $\lim\limits_{n\to+\infty} n\,u_n^n$, un théorème de croissances comparées sur $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ s'impose avant de conclure par encadrement.

c) Pour $n\geq 2$, on a $u_n \neq 1$ donc $f_n(u_n)=1$ s'écrit $\dfrac{n\,u_n{}^{n+2}-(n+1)u_n{}^{n+1}+u_n}{(1-u_n)^2}=1$.

d) Avant le passage à la limite et en vue d'utiliser la question 4b), on peut écrire $n\,u_n{}^{n+2}-(n+1)u_n{}^{n+1}$ sous la forme $u_n^2\times n\,u_n^n - u_n\left(n\,u_n^n+u_n^n\right)$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) • L'horrible confusion ! La question portait sur la **fonction** f_n et pas sur la **suite** $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ donc étudier le signe de $f_{n+1}(x)-f_n(x)$ était hors-sujet.

• Dommage de dériver le produit $k\,x^k$ et de trouver $k^2x^{k-1}+x^k$, ce qui révèle une grande confusion entre la constante k et la variable x.

• Il était inutile (et très difficile) de vouloir simplifier $f_n'(x)$ pour avoir son signe.

• Expliquer que « f_n est une somme de termes positifs (ce qui est vrai) "donc" f_n est strictement croissante » révèle la confusion avec la preuve de la stricte croissance de la **suite** $\left(f_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n} k\,x^k$.

• Dans cette question, la grosse triche consistait à écrire que, comme on sait que $x\in[0,1]$, alors on a $x>0$. En fait, on n'a que $x\geq 0$.

b) • Il est moche d'oublier la continuité en se contentant de la stricte croissance sur $[0,1]$ pour utiliser le théorème de la bijection.

• Pas joli non plus de citer la « stricte continuité » de f_n : ça n'existe pas !

• L'indigne insanité : « $\sum\limits_{k=1}^{n} k = nk$ » : deux ans de prépa pour ça !

• Conclure que l'équation $f_n(x)=1$ possède une unique solution sans jamais prouver que 1 appartient à l'intervalle d'arrivée de f_n est vraiment osé !

c) • Connaissant $f_n(x)$, il suffit de faire $n=1$ pour avoir $f_1(x)$. Pas question de toucher, ni à k, ni à x.

• Il est très fâcheux de trouver $u_1 = x$!

2) b) Il faut vraiment un gros manque de rigueur pour écrire $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+(n+1)x^{n+1}$: quand on remplace x par u_n, on le fait partout !

c) Il est correct d'écrire $f_{n+1}\left(u_n\right)-f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\leq 0$ mais de là à expliquer qu'en appliquant f_{n+1}^{-1} qui est croissante, on obtient $u_n-u_{n+1}\leq 0$, il y a une marge !!!
Tel quel, il faudrait que f_{n+1}^{-1} soit linéaire pour avoir dans le membre de gauche :
$f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}\left(u_n\right)-f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\right)=f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}\left(u_n\right)\right)-f_{n+1}^{-1}\left(f_{n+1}\left(u_{n+1}\right)\right)=u_n-u_{n+1}$, mais malheureusement, ce n'est pas le cas.

d) • Attention ! Une suite décroissante et minorée par 0 converge, mais pas forcément vers 0 : **un** minorant n'est pas forcément **la** limite !

• Pire encore consistait à écrire « la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 1 donc convergente » : la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas minorée par 1 (mais majorée par 1, ce qui ne sert à rien ici).
Ceci est proche de la faute suivante « la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante donc elle est minorée par son premier terme $u_1=1$ » !

• Le grand flou : « la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et bornée (!) donc convergente » : il faut être précis, on fait des maths !

• La grosse gaffe : « la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et majorée donc convergente ».

3) a) La faute classique sur ce genre de question consiste à trouver $\dfrac{1-x^n}{1-x}$.
Le pire, parmi les nombreux résultats différents observés sur les copies, était de trouver $\dfrac{(n+1)(2n+1)}{2}$, x^n, $\dfrac{1-x}{1-x^n}$, $\dfrac{x(x+1)}{1-x}$, $\dfrac{x^n-nx+1}{(1-x)^2}$, $\dfrac{x^{n+1}-x}{1-x}$, $\dfrac{1-q^n}{1-q}$, etc.

b) Il est impardonnable de se tromper en dérivant $\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$, notamment en dérivant $1-x^{n+1}$ en $(n+1)x^n$ au lieu de $-(n+1)x^n$!

c) • Il est "léger" d'écrire « $\forall x\in[0,1]$, $f_n\left(x\right)=\dfrac{n\,x^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$ » car il y a tout de même un petit problème pour $x=1$.

• Il était très dommageable de ne pas voir que $f_n\left(x\right)=\sum_{k=1}^{n}k\,x^k=x\sum_{k=1}^{n}k\,x^{k-1}$ et de s'embarquer dans un changement d'indice et dans des calculs souvent fautifs.

4) a) • Écrire $u_2\left(1+2u_2\right)=1$ à la place de $2u_2^2+u_2-1=0$ n'est pas très intéressant car on sait résoudre les équations du second degré depuis longtemps, mais en déduire que, soit $u_2=1$, soit $1+2u_2=1$, est très navrant…

• La sanction est la même (alors que la faute semble moins grave, quoique…) pour ceux qui ont trouvé, avec des erreurs de signe et/ou de formule, $\Delta=7$ ou $\Delta=5$ pour résoudre $2u_2^2+u_2-1=0$.

b) • La suite $\left(u_n^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas géométrique car sa supposée "raison" n'est pas constante !!! L'argument « $|u_n|<1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$ » était donc irrecevable.

• Pour la première fois, le théorème d'encadrement se voit affublé du nom de théorème des « limites convergentes » : mais qu'est-ce donc qu'une limite convergente ? Une suite peut être convergente, une fonction, une intégrale, une série, peuvent l'être, mais une limite ? On nage en plein non-sens.

d) Il est peu crédible de balancer $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n^{n+2} = 0$ sans donner le lien avec $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n^n = 0$.

Exercice 2 ....

❖ Conseils de méthode

1) a) Inutile, mais pas faux, d'utiliser la caractérisation en trois points d'un sous-espace vectoriel, car au vu de la question 1b), mieux vaut déterminer les matrices B et C de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $E = \mathrm{Vect}(B, C)$.

b) Il suffit de montrer que (B, C) est une base de E en s'assurant de sa liberté.

2) Il suffit de regarder attentivement la matrice $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$.

3) Il faut trouver les réels a et b tels que $A = M(a,b)$.

4) La commande `np.array` de `Python` est bien adaptée car elle permet de saisir les matrices "ligne par ligne".

5) a) Le cours stipule que « λ est valeur propre de A si, et seulement si, $A-\lambda I$ n'est pas inversible ».

b) Il faut s'intéresser aux matrices $A-5I$ et $A+4I$ et appliquer le point de cours donné ci-dessus.

c) Il faut résoudre les systèmes $AX = 0$, $(A-5I)X = 0$ et $(A+4I)X = 0$.

6) Faire attention que $\mathrm{rg}(A-\lambda I)$ n'est pas la dimension du sous-espace propre de A associé à la valeur propre λ.

7) a) Il suffit de calculer $M(a,b)U$, $M(a,b)V$ et $M(a,b)W$.

b) Les grandes étapes sont la diagonalisabilité de $M(a,b)$, puis la relation $M(a,b)=PDP^{-1}$, en précisant la matrice D, mais sans calculer P^{-1}, et enfin (par récurrence mais sans la faire) la relation $M(a,b)^n = PD^nP^{-1}$.

c) Il suffit de traduire la relation $M(a,b)^n = PD^nP^{-1}$ pour `Python`.

❖ Conseils de rédaction

1) a) En cas de preuve par caractérisation d'un sous-espace, ne pas oublier de justifier les deux conditions $E \neq \varnothing$ et $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) La liberté de la famille (B,C) est certes facile à établir mais il faut tout de même un petit argument.

2) Le fait que deux colonnes soient égales ne prouve pas que le rang de $M(a,b)$ vaut 2 mais seulement qu'il est inférieur ou égal à 2 (en fait, un argument supplémentaire permet de conclure qu'il est égal à 2 mais ce n'est pas utile ici).

3) On a le droit de voir ce qu'il se passe… mais si on ne voit pas, il n'y a aucune honte à faire une identification de coefficients.

4) Il faut respecter le nombre de parenthèses et de crochets que `Python` exige et ne pas non plus oublier `np.array` devant !

5) b) Il faut **prouver** que $A-5I$ et $A+4I$ ne sont pas inversibles en argumentant sur leur rang. On peut aussi montrer que les systèmes $(A-5I)X=0$ et $(A+4I)X=0$ ne sont pas de Cramer.

c) Il faut réellement résoudre les trois systèmes par équivalence et non pas se contenter de trouver une solution "évidente" car on veut une base.

7) b) Il faut rédiger un minimum pour être un tant soit peu crédible !

c) Faire attention qu'on connaît la matrice P par ses colonnes mais qu'il faut écrire les lignes pour sa saisie dans `Python`.

❖ Aide à la résolution

1) a) Toute matrice de E s'écrit comme combinaison linéaire des matrices $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$.

b) La famille (B,C) contient 2 matrices donc on est dans un cas où la liberté est facile à prouver.

2) C'est du cours : les matrices de E sont symétriques et ont 2 colonnes égales.

3) Avec un peu d'attention, on voit que $A = M(1,3)$.

5) a) Il suffit de remarquer que $A = A - 0 \times I$ n'est pas inversible.

b) On peut observer attentivement les colonnes des matrices $A-5I$ et $A+4I$ puis en déduire leur rang, ou pratiquer la méthode du pivot de Gauss (sans résoudre complètement les systèmes $(A-5I)X=0$ et $(A+4I)X=0$, ce qui empièterait sur la question suivante).

c) L'énoncé demande de prendre la première composante égale à 1 pour chaque vecteur propre : il faut donc obéir.

6) Grâce au théorème du rang, on trouve $r_1 = 2$ et $r_2 = 2$.

7) a) On trouve que U, V et W sont vecteurs propres de $M(a,b)$ associés aux valeurs propres 0, $2a+b$ et $2a-b$ (pas forcément dans cet ordre car ça dépend du choix fait pour le baptême des vecteurs U, V et W).

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) a) Si on avait choisi la caractérisation d'un sous-espace vectoriel :

- Mieux valait éviter d'écrire « $E \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ », mais plutôt $E \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
- Pour la stabilité, il fallait montrer que, si $M(a,b)$ et $M(c,d)$ sont éléments de E et si λ est un réel, alors $M(a,b)+\lambda M(c,d)$ est élément de E, c'est-à-dire s'écrit $M(x,y)$, et on trouvait $x = a+\lambda c$ et $y = b+\lambda d$.

Il ne fallait pas juste constater que $M(a+\lambda c, b+\lambda d) = M(a,b)+\lambda M(c,d)$.

- Il fallait éviter de confondre E avec $M(a,b)$ en écrivant par exemple $M(a,b) = \mathrm{Vect}(B,C)$, ce qui n'a pas de sens !

b) • L'égalité $E = \mathrm{Vect}(B,C)$ ne garantit pas que (B,C) est une base de E, ni non plus que $\dim E = 2$.

- Lire $\dim E = 3$ laisse le lecteur pantois : il doit y avoir une confusion avec la taille des matrices de E.

2) • La phrase qui tue (vue en un seul exemplaire heureusement) :
« Les matrices de E ne sont pas inversibles car symétriques et ne sont pas diagonalisables car de rang 3 » !

• Pas mal non plus : « Les matrices de E sont diagonales donc diagonalisables » : mais qu'est-ce qu'une matrice diagonale ???

- Il ne fallait pas se contenter de répondre pour la matrice $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ et pour la matrice $C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&1&0\end{pmatrix}$ séparément, mais pour **toute** matrice de E.

3) Dommage d'avoir la bonne conclusion avec autre chose que $A=B+3C$.

4) • Pas question d'écrire un autre en-tête que « `def matA():` ».

• Suite à la mauvaise compréhension du verbe « retourner » utilisé par l'énoncé, qui est pourtant une des traductions de `return`, on a assisté à quelques initiatives pour "retourner" au sens premier du mot la matrice A : `return np.transpose(A)` ou `return 1/A`, ou `return al.inv(A)`, et même plusieurs instructions consistant à échanger les lignes 1 et 3 de A, ce qui, pour le coup, constitue un vrai "retournement", contrairement aux autres propositions !

5) c) • Le manque total de crédibilité consiste à "balancer" $AX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z=-x \\ y=0 \end{cases}$ sans aucun travail en amont. Même chose pour les systèmes $AX=5X$ et $AX=-4X$. Il y a beaucoup de points à perdre à faire semblant de résoudre un système.

• Il faut coder les opérations élémentaires sur les lignes qui permettent de passer d'un système à un système équivalent.

• Une bricole qui ne veut rien dire : « résolvons $AX+4I=0$ » au lieu de « résolvons $(A+4I)X=0$ ».

• Une faute d'inattention qui coûte cher : $3x-6y+3z=0 \Leftrightarrow x-3y+z=0$.

• Il ne fallait pas écrire « $\mathrm{Vect}(U)$ est une base du sous-espace propre E_0 », mais « (U) est une base du sous-espace propre E_0 ».

6) • Sachant que les sous-espaces propres associés aux valeurs propres 5 et –4 sont de dimension 1, il ne fallait surtout pas répondre $r_1=1$ et $r_2=1$: il y a ici confusion entre image et noyau.

• Bien pire était de penser que les instructions proposées renvoyaient un vecteur, alors que le mot `rank` ne prête pas tant que ça à confusion, même avec un petit niveau d'anglais.

7) a) • L'erreur éternelle : « U est **le** vecteur propre etc. » : on doit savoir que pour chaque valeur propre, il y a une infinité de vecteurs propres.

• Il ne s'agissait pas de vérifier que U, V et W sont vecteurs propres de A, mais qu'ils sont vecteurs propres de $M(a,b)$.

• Il est très moche d'écrire $M(a,b)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=2a+b\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ sans mettre de parenthèses autour de $2a+b$.

b) On ne peut pas écrire une relation du type $M(a,b)=PDP^{-1}$ sans avoir justifié l'inversibilité de P.

c) • Ayant par exemple $P=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&-2\\-1&1&1\end{pmatrix}$, la traduction en `Python` n'est pas

```
P=np.array([[1,0,-1],[1,1,1],[1,-2,1]])
```

En effet, `Python` donne la liste des lignes de P et pas de ses colonnes.

• La commande `np.dot` ne prend en charge que 2 variables et ne permet donc pas d'écrire :

```
np.dot(P,D,al.inv(P))
```

• Il était possible, sans utiliser la diagonalisation de $M(a,b)$, de faire une boucle `for`, mais surtout pas en écrivant :

```
def puissanceM(a,b,n):
   M=np.array([[a,b,a],[b,2*a-b,b],[a,b,a]])
   for k in range(1,n+1):
       M=np.dot(M,M) # la faute est à cette ligne
   return(M)
```

On ne calcule ici que $M(a,b)^2$, $M(a,b)^4$, $M(a,b)^8$, etc.

Exercice 3 ....

❖ Conseils de méthode

1) Il y a trois points à vérifier : positivité de f_n, continuité de f_n sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en 0 et n) puis convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ qui doit, de plus, être égale à 1.

2) a) Le théorème de transfert permet d'avoir des intégrales faciles à calculer sans intégration par parties pour obtenir $E\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)$ et $E\left(\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$.

b) • Pour l'espérance de X_n, il est bien de poser $Y_n=1-\dfrac{X_n}{n}$ puis d'exprimer X_n en fonction de Y_n.

- Pour la variance, toujours après avoir posé $Y_n = 1 - \frac{X_n}{n}$, il est malin de calculer $V(Y_n)$ puis $V(X_n)$.

3) Utiliser toujours la définition comme point de départ : $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

4) a) Si x est strictement négatif, on a $F_n(x) = 0$, donc cette question est très facile (si on a la bonne réponse à la question précédente) !

b) D'après l'expression trouvée à la question 3), on a $F_n(x) = 1 - \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ dès que $n \geq x$: il faut donc réfléchir à la relation entre $n \geq x$ et $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$.

c) Le plus pratique est d'utiliser un équivalent usuel de $\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.

d) Par définition de la convergence en loi, il suffit de déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$.

5) a) C'est une question de cours.

b) Un bon début est de justifier que $P(Z_n > x) = P\big(\min(U_1, \ldots, U_n) > x/n\big)$, puis d'enchaîner en expliquant pourquoi on a $(Z_n > x) = \bigcap\limits_{k=1}^{n} (U_k > x/n)$ et enfin de conclure grâce à l'indépendance des variables $U_1, \ldots, U_n$.

c) Il est suffisant de signaler que Z_n et X_n ont la même fonction de répartition.

d) D'après la question 5c), simuler X_n, c'est simuler Z_n.

❖ Conseils de rédaction

1) • Comme d'habitude, il ne faut pas négliger les deux premiers points (positivité et continuité sauf peut-être en 0 et n) : ils sont "payés" !

- Ne pas oublier, non plus, de mentionner les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f_n(x)\mathrm{d}x$ et $\int_{n}^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$ qui sont nulles.
- La bonne définition de f_n ne s'impose pas dans cet exercice car f_n est visiblement bien définie. Cela dit, ça ne coûte pas très cher d'en toucher un mot.

2) a) Mieux vaut signaler que $\int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{t}{n}\right) f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{n}^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right) f_n(t)\mathrm{d}t$ convergent et sont nulles. Même chose pour $\int_{-\infty}^{0} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)\mathrm{d}t$ et $\int_{n}^{+\infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)\mathrm{d}t$.

b) Il est plus crédible de montrer l'existence avant de donner la valeur.

3) Il est bien de mentionner et de faire apparaître la relation de Chasles pour les cas $0 \leq x \leq n$ et $x > n$.

4) b) La partie entière doit apparaître sans magie, mais avec rigueur et honnêteté.

c) Ne pas oublier de signaler que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{x}{n} = 0$ afin de pouvoir bénéficier de l'équivalent usuel de $\ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)$.

d) Ayant $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) = -x$ pour $x \geq 0$, il faut signaler que c'est la continuité de la fonction exponentielle en $-x$ qui permet d'arriver à $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-x}$.

5) b) C'est l'indépendance mutuelle des variables $U_1, \ldots, U_n$ qui permet d'écrire :

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} [U_k > x/n]\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(U_k > x/n\right)$$

❖ Aide à la résolution

1) • Pour la continuité de f_n sur $[0, n]$, le meilleur (voire unique) argument consiste à écrire que f_n est polynomiale.

• Pour la positivité de f_n sur $[0, n]$, l'argument massue est $x \leq n$.

• Le calcul de $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ se réduit à $\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$ qui est l'intégrale définie d'une fonction continue.

2) a) Grâce au théorème de transfert, on s'intéresse aux intégrales $\int_0^n \left(1 - \dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_0^n \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t$. Attention tout de même : le théorème de transfert ne donne pas l'existence de $E\left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)$ et $E\left(\left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$ mais seulement un moyen de calculer ces deux espérances une fois qu'on a prouvé que les intégrales en jeu sont absolument convergentes (ce qui est facile ici puisque la fonction f_n est nulle ailleurs que sur $[0, n]$ donc on n'a pas affaire à des intégrales impropres).

b) Ayant posé $Y_n = 1 - \dfrac{X_n}{n}$, on en déduit $X_n = n - nY_n$ puis on conclut avec $E(X_n) = n - nE(Y_n)$ et $V(X_n) = n^2 V(Y_n)$.

On pouvait bien sûr écrire $X_n^2 = n^2 \left(1 - \dfrac{X_n}{n}\right)^2 - n^2 + 2nX_n$ pour avoir $E(X_n^2)$ puis $V(X_n)$ mais c'était plus pénible que de calculer $V(Y_n)$.

3) Comme f_n est définie en 3 "morceaux", F_n est également définie selon les 3 mêmes "morceaux" donc il faut distinguer les cas : $x<0$, $0 \leq x \leq n$ et $x>n$.

4) c) L'équivalent qui mène au résultat est $\ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{x}{n}$.

d) Pour $x \geq 0$, quand on cherche la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$, on est automatiquement dans le cas $n \geq x$ dès que $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$.

5) b) Ayant trouvé $P(Z_n > x)$, on finit avec $F_{Z_n}(x) = 1 - P(Z_n > x)$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) • À méditer sérieusement : une primitive de la fonction $x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}$ n'est pas $x \mapsto \dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$, ni $x \mapsto -\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$, ni même $x \mapsto \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n$, mais :

$$x \mapsto -\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

• Ce genre de faute de primitive a conduit un candidat à conclure que f_n est une densité si $n=1$!

• Les deux égalités de l'enchaînement $\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n\right]_0^n = 1$ sont fausses, la première est une faute de primitive mais la deuxième est en plus une grosse arnaque !

2) b) • Ayant posé $Y_n = 1 - \dfrac{X_n}{n}$, il est ballot d'en déduire $X_n = 1 - nY_n$ (les règles de calcul vues au collège sont toujours valables en prépa).

• Encore une erreur de niveau collège qui fiche tout en l'air :

$$\text{« } E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2 = 1 - \frac{2}{n}E(X_n) + \frac{1}{n}E(X_n^2) \text{ »}$$

Le dernier terme devrait être $\dfrac{1}{n^2}E(X_n^2)$.

• Il est dommage, et c'est sévèrement sanctionné, de laisser $E(X_n) = n - \dfrac{n^2}{n+1}$ sans aucune simplification.

• Le pompon était de trouver une variance négative (ce n'est jamais le cas) et une espérance négative (ici, ça ne pouvait pas être le cas car X_n prend ses valeurs dans $[\![0,n]\!]$).

3) • Écrire « $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ » est correct (c'est la définition) mais enchaîner par « $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t$ » ne l'est pas car l'intégrale écrite est divergente… et il est trop tard pour se rattraper : ce sera vécu comme une escroquerie.

• Les égalités $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(x)\,\mathrm{d}x$, $F_n = P(X_n \leq x)$, ou $F_n = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ne veulent rien dire et révèlent à coup sûr un malaise envers les objets manipulés.

• La réponse $F_n(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est irrecevable puisque l'on n'a pas $\lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x) = 1$.

4) b) Il n'est pas honnête de répondre correctement à cette question dont le résultat est donné, alors que l'on avait une fonction de répartition fausse à la question 3).

c) Constater que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right) = 0$ ne suffit pas à affirmer que le produit $n \ln\left(1 - \dfrac{x}{n}\right)$ tend vers 0 car on est face à une forme indéterminée !

d) • Il ne fallait pas oublier de "rapatrier" le cas $x < 0$ avant de conclure à la convergence en loi.

• L'assertion « $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ si $0 \leq x \leq n$ » est un non-sens : une limite quand n tend vers $+\infty$ ne peut pas être suivie de la condition $0 \leq x \leq n$!

• Une autre faute consistait à trouver $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et conclure quand même à la convergence en loi vers une variable suivant la loi exponentielle de paramètre 1 : la première ligne de l'accolade ne le permet pas !

5) a) Il est ballot de ne pas savoir son cours sur le bout des doigts.

b) • Encore une faute du niveau collège : $P(Z_n > x) = P(M_n > nx)$!

• Il n'est pas bien du tout d'écrire $(Z_n > x) = \left(\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k > x/n\right)$: on pourrait croire que l'auteur manipule l'objet $\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k$, intersection de variables aléatoires, ce qui est un non-sens !

- Ayant $P(Z_n > x) = (1 - G(x/n))^n$, l'égalité qui conduit à la bonne réponse n'est pas $G(x/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/n & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$, mais :

$$G(x/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x/n < 0 \\ x/n & \text{si } 0 \le x/n \le 1 \\ 1 & \text{si } x/n > 1 \end{cases}$$

- Écrire $P(Z_n > x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$ sans aucune condition sur x puis conclure finalement que $P(Z_n > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}$ n'est rien moins que du vol !

c) La réponse à cette question aurait dû permettre de vérifier la cohérence avec celle donnée à la question 3).

Problème ....

❖ Conseils de méthode

1) Ligne 2 : il faut simuler une loi uniforme discrète pour le choix de k.
Ligne 4 : l'urne numérotée $n+1$ ne contient pas de boule blanche.
Ligne 6 : l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches.
Lignes 9 et 10 : la boucle `while` doit traduire le fait que, tant qu'on pioche une boule noire, on recommence et le nombre de tirages s'incrémente d'une unité.

2) L'expression « choisir une urne au hasard » oriente vers une loi uniforme.

3) a) Si on SAIT que l'événement U_k est réalisé, alors on cherche le rang de la première boule blanche lors de tirages indépendants dans l'urne numérotée k : ici aussi, ça oriente vers un certain type de loi.

b) Si on a la loi conditionnelle demandée à la question 3a), alors c'est facile car on sait la simuler.

4) a) L'urne numérotée $n+1$ ne contient pas de boule blanche.

b) Même sans avoir la bonne réponse à la question 3a), on peut trouver.

c) La formule des probabilités totales est incontournable pour ce type de question :

$$P(X_n = 1) = \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k) P_{U_k}(X_n = 1)$$

5) a) Même remarque qu'à la question 4a).

b) C'est la loi conditionnelle trouvée à la question 3a) qui fait l'affaire, sinon c'est fichu, contrairement à la question 4b) où on pouvait deviner !

c) C'est encore la formule des probabilités totales.

6) a) Il faut justifier que l'on peut scinder la somme $\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$ en deux sommes (convergence, convergence !).

b) On a $P(X_n \geq 2)=\sum_{j=2}^{+\infty} P(X_n=j)$ et $P(X_n=j)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}-\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$ puis il faut permuter les deux sommes en présence.

7) a) Utiliser le système complet d'événements $([X_n=0],[X_n=1],[X_n\geq 2])$.

b) La probabilité trouvée à la question 7a) oriente vers le choix de l'urne.

8) a) Il est bien de factoriser pour arriver à $j\,P(X_n=j)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$ puis de sommer prudemment pour j allant de 2 à N, et enfin de faire tendre N vers $+\infty$ dès que possible.

b) La commande `np.sum(1/v)` permet le calcul de $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

9) a) Encadrer $\frac{1}{t}$ en utilisant le fait que $p \leq t \leq p+1$, puis intégrer de p à $p+1$.

b) Procéder en sommant de 1 à $n-1$ l'inégalité obtenue en 8a).

c) Considérer séparément chacune des inégalités de l'encadrement obtenu à la question 8b) et en déduire des inégalités concernant $\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

d) Il suffit de diviser prudemment l'encadrement précédent par $\ln(n)$.

❖ Conseils de rédaction

1) Attention ! C'est `rd.randint(1,n+2)` et pas `rd.randint(1,n+1)` qui simule le choix au hasard d'une urne parmi $n+1$ urnes numérotées de 1 à $n+1$: c'est le problème avec `numpy.random`.

2) Il est bien de préciser pourquoi on est dans une situation d'équiprobabilité.

3) a) Les notations X_n/U_k, ou pire ${}_{U_k}X_n$, n'existent pas : la notion de variable aléatoire conditionnelle n'a pas encore été inventée et ne le sera jamais ! On ne peut que parler de loi conditionnelle.

4) a) b) Il faut argumenter un minimum afin d'être complètement crédible.

c) • Préciser, même sans preuve, que les événements $(U_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ sont tous de probabilité non nulle : ça permet d'avoir le droit d'écrire les probabilités conditionnelles $P_{U_k}(X_n = 1)$.

• Il faut se souvenir que le terme d'indice $k = n+1$ est nul.

5) a) b) Même chose qu'aux questions 4a) et 4b).

c) Si c'est fait à la question 4c), on peut ici se passer de préciser de nouveau que les événements $(U_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ sont tous de probabilité non nulle.

6) a) Il est bien de signaler que $-1 < \frac{k}{n} < 1$ avant de scinder la somme.

b) Il faut justifier l'égalité $P(X_n \geq 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(X_n = j)$ par le fait que X_n est à valeurs entières, mais il n'y a pas d'autre précaution à prendre pour l'écrire : la convergence est assurée car on calcule une probabilité qui existe bel et bien.
Ensuite, il est prudent de justifier qu'on peut permuter les deux sommes (avec la convergence des séries en jeu).

7) b) Il ne faut pas se contenter de répondre par « oui » ou par « non » : un minimum est exigé !

8) a) Il est bien de prouver l'existence de l'espérance de X_n, ce qui provient de la convergence absolue de la série de terme général $j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$.

9) a) • Mieux vaut commencer en écrivant : $\forall t \in [p, p+1]$, $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$ (en n'oubliant pas la décroissance de $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$).
Il faut noter que c'est le symbole « $\forall$ » qui donne le droit d'intégrer.

• Ne pas oublier les conditions pour intégrer l'inégalité $\frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{p}$ (bornes dans l'ordre croissant, fonctions continues).

b) Pour sommer de 1 à $n-1$, il est bien de signaler pourquoi on a pris $n \geq 2$.

d) Pour diviser par $\ln(n)$, il faut signaler que $n \geq 2$ pour avoir $\ln(n) > 0$.

❖ Aide à la résolution

1) Pour traduire « tant qu'on pioche une boule noire », il faut se souvenir que les boules noires sont supposées être numérotées de 1 à $k-1$.

3) a) Dans l'urne numérotée k, la probabilité de piocher une boule blanche est égale à $\dfrac{n-k+1}{n}$.

4) b) La loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est une loi géométrique dont le paramètre a été donné un peu plus haut !

c) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(U_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$ amène à $P(X_n=1)=\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$ et il reste peu de choses à faire.

5) c) Il faut arriver jusqu'à $P(X_n=j)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\times\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\times\frac{n-k+1}{n}$ puis avoir l'idée d'écrire $\dfrac{n-k+1}{n}=1-\dfrac{k-1}{n}$ ou faire (comme dans le corrigé) le changement d'indice $h=k-1$ pour finaliser.

6) a) Après avoir justifié qu'on peut scinder la somme (convergence toujours !), il suffit de changer d'indice dans la première.

b) Pour $n=1$, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k$ est nulle, et pour $n\geq 2$, le premier terme de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k$ est nul donc elle est égale à $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k$ qu'on sait calculer.

7) b) N'y aurait-il pas une urne dans laquelle les tirages ne donnent aucune boule blanche ?

8) a) Vers la fin, il faut se souvenir que $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}=\frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}$, ce qui amène à :

$$E(X_n)=\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{n}{n-k}-\frac{n-k}{n}\right)$$

9) b) Ayant écrit $\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}\leq\sum_{p=1}^{n-1}\int_p^{p+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\leq\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$, la relation de Chasles pour les intégrales et le changement d'indice $i=p+1$ dans la première somme permettent de conclure.

d) La question précédente donne l'équivalent $\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}\underset{+\infty}{\sim}\ln(n)$, puis il ne faut pas oublier, pour conclure, que $\dfrac{n}{n+1}\underset{+\infty}{\sim}1$.

❖ Les fautes qu'il ne fallait pas faire

1) Proposer `k=k-1` pour la première ligne est une atrocité : il s'agit de choisir dans quelle urne on va jouer !

2) • Il y a $n+1$ urnes donc la réponse $P(U_k)=\frac{1}{n}$ n'est pas recevable : il faut rester concentré même (et surtout) sur des questions faciles comme celle-ci, d'autant plus qu'elle sert pour les questions 4c) et 5c).

• Pas question d'écrire que U_k suit la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n+1 \rrbracket)$ car U_k n'est pas une variable aléatoire, mais un événement.

3) a) • Il est dommage de calculer correctement la probabilité mais de ne pas reconnaître une loi géométrique.

• Il est ballot de répondre « loi géométrique de paramètre p : que désignerait ce p venu de nulle part ?

• La notion de variable aléatoire conditionnelle n'a pas été inventée et ne le sera jamais donc il fallait faire une phrase en français plutôt que d'écrire le raccourci « X_n / U_k (ou ${}_{U_k}X_n$) suit la loi géométrique etc. ».

4) b) Il ne fallait pas confondre $P_{U_k}(X_n=1)$ avec $P([X_n=1]\cap U_k)$!

c) • La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(U_k)_{k\in\llbracket 1, n+1 \rrbracket}$, ne s'écrit pas $P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n+1} P_{U_k}(X_n=1)$, mais $P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n+1} P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$.

• Balancer sans explication que $P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n} P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$ n'est pas correct car le système complet d'événements utilisé est $(U_k)_{k\in\llbracket 1, n+1 \rrbracket}$, et pas $(U_k)_{k\in\llbracket 1, n \rrbracket}$.

• Trouver $P(X_n=1)=\frac{n}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}$ et s'arrêter là coûte cher ! C'est bien dommage car la bonne réponse en découlait immédiatement.

5) a) Une réponse très étrange : « $P_{U_{n+1}}(X_n=j)=-\frac{1}{2}$ » !

b) Même remarque que pour 4b).

c) Même remarque que pour 4c).

6) a) Affirmer que la série géométrique de raison $\frac{k}{n}$ converge car $0 \leq \frac{k}{n} \leq 1$ est proche de l'hérésie ! Il y a un petit problème si $\frac{k}{n} = 1$.

8) a) Écrire que X_n est une variable finie est une supercherie car $X_n(\Omega) = \mathbb{N}$!

b) La commande `np.sum(1/p)` ne somme rien, du moins rien d'autre que le seul terme $1/p$!

9) a) • Le travail sur l'intégrale $\int_p^{p+1} \frac{1}{t} \mathrm{d}t$ ne commence pas par $p < t < p+1$, mais par $p \leq t \leq p+1$.

• Mieux vaut éviter de faire appel à la décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+$ (pire sur $\mathbb{R}$) en lieu et place de $\mathbb{R}_+^*$.

b) Il était plus pratique de sommer l'inégalité précédente pour k allant de 1 à $n-1$, plutôt que de sommer pour k allant de 1 à n et d'être obligé de bricoler (ou de tricher un peu) pour parvenir à ses fins.

d) Dommage de laisser l'équivalent $E(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \ln(n)$, car ce n'est pas l'équivalent le plus simple possible comme l'exigeait l'énoncé.

Corrigé 2025

Exercice 1 ....

1) a) La fonction f_n est polynomiale donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et, a fortiori, dérivable sur $[0,1]$.

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $f_n'(x)=\sum_{k=1}^{n} k\times k\,x^{k-1}=\sum_{k=1}^{n} k^2 x^{k-1}$ et $f_n'(x)$ est strictement positive comme somme de termes tous positifs (car $k\geq 1>0$ et $x\geq 0$) dont le premier est égal à 1 (donc strictement positif).
Par conséquent, f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) f_n est polynomiale donc continue sur $[0,1]$ et elle est strictement croissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f_n(0), f_n(1)]$.

On a $f_n(0)=0<1$ et $f_n(1)=\sum_{k=1}^{n} k=\dfrac{n(n+1)}{2}$ donc, comme $n\geq 1$, on a $f_n(1)=\dfrac{n(n+1)}{2}\geq 1$, et ainsi, 1 appartient à $[f_n(0), f_n(1)]$, ce qui montre, par bijectivité de f_n, que l'équation $f_n(x)=1$ possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.

c) Avec $n=1$, l'équation $f_n(x)=1$ devient $f_1(x)=1$, c'est-à-dire $x=1$ dont la solution plus qu'évidente est $u_1=1$.

2) a) On a $f_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{n+1} k\,x^k=\sum_{k=1}^{n} k\,x^k+(n+1)x^{n+1}$.
On trouve ainsi :

$$\boxed{f_{n+1}(x)=f_n(x)+(n+1)x^{n+1}}$$

b) On en déduit : $f_{n+1}(u_n)=f_n(u_n)+(n+1)u_n^{n+1}=1+(n+1)u_n^{n+1}$.
Comme $u_n\geq 0$, on a $1+(n+1)u_n^{n+1}\geq 1$ et on obtient :

$$\boxed{f_{n+1}(u_n)\geq 1}$$

c) Par définition de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, on sait que u_{n+1} est la solution de l'équation $f_{n+1}(x)=1$, on a donc $f_{n+1}(u_{n+1})=1$ et la relation $f_{n+1}(u_n)\geq 1$ s'écrit maintenant : $f_{n+1}(u_n)\geq f_{n+1}(u_{n+1})$.
Par stricte croissance de f_{n+1}, on peut conclure que $u_n \geq u_{n+1}$, et ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3) a) Comme $x\neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.

b) En posant $g_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$, alors, par linéarité de la dérivation, on a $g_n'(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ (le terme d'indice 0 de $g_n(x)$ étant égal à 1, sa dérivée est nulle). De plus, comme $g_n(x)=\dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour $x\neq 1$, les règles de dérivation donnent :

$$g_n'(x)=\frac{-(n+1)x^n(1-x)-(1-x^{n+1})\times(-1)}{(1-x)^2}=\frac{-(n+1)x^n+(n+1)x^{n+1}+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$$

En ordonnant suivant les puissances décroissantes :

$$\boxed{\forall x\neq 1,\ \sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}=\frac{n\,x^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}}$$

c) Pour tout $x\in[0,1]$, on a $f_n(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\,x^k = x\sum_{k=1}^{n} k\,x^{k-1}$ mais, avec $x\in[0,1[$, la condition $x\neq 1$ est réalisée et on obtient, grâce à la question précédente :

$$\boxed{\forall x\in[0,1[,\ f_n(x)=\frac{n\,x^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}}$$

4) a) Par définition, on a $f_2(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{2} k\,x^k = x+2x^2$ et on sait que u_2 est une solution de l'équation $f_2(x)=1$, donc solution de $x+2x^2=1$, soit en ordonnant : $2x^2+x-1=0$. Le discriminant est $\Delta=9$ et on trouve que les deux solutions de cette équation sont -1 et $\dfrac{1}{2}$.

Comme $u_2\geq 0$, on est certain que $u_2=\dfrac{1}{2}$.

CORRIGÉ

Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et comme $u_2 = \dfrac{1}{2}$, alors, pour tout entier naturel $n \geq 2$, on a $u_n \leq u_2$, soit $u_n \leq \dfrac{1}{2}$.
On sait depuis la question 1c) que $u_n \geq 0$ donc on obtient :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ 0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}}$$

b) De l'encadrement précédent et par croissance de la fonction $x \mapsto x^n$ sur $\mathbb{R}_+$ donc sur $\left[0,\dfrac{1}{2}\right]$, on en déduit : $0 \leq u_n^n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.
Comme $\dfrac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, et on obtient, par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n^n = 0}$$

Du même encadrement, on tire aussi : $0 \leq n\,u_n^n \leq n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

Comme $\dfrac{1}{2} \in \left]-1,1\right[$, on a, par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$, et finalement on trouve, encore une fois par encadrement :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} n\,u_n^n = 0}$$

c) Par définition de u_n, on a $f_n(u_n) = 1$ et comme, pour tout entier $n \geq 2$, on a $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$, on est sûr que $u_n \neq 1$ et on peut appliquer la question 3c) avec $x = u_n$, ce qui donne :

$$\forall n \geq 2,\ \frac{n\,u_n^{\,n+2} - (n+1)u_n^{\,n+1} + u_n}{(1-u_n)^2} = 1$$

On a donc $(1-u_n)^2 = n\,u_n^{\,n+2} - (n+1)u_n^{\,n+1} + u_n$, d'où :

$$(1-u_n)^2 - u_n = n\,u_n^{\,n+2} - (n+1)u_n^{\,n+1}$$

En développant le membre de gauche, on trouve bien :

$$\boxed{\forall n \geq 2,\ u_n^2 - 3u_n + 1 = n\,u_n^{n+2} - (n+1)u_n^{n+1}}$$

d) Dans l'objectif de passer à la limite en utilisant les deux résultats de la question 4b), on peut réécrire ceci sous la forme :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = u_n^2 \times n\,u_n^n - u_n\,(n+1)u_n^n$$

Avec encore un petit effort, on obtient :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = u_n^2 \times n u_n^n - u_n \left(n u_n^n + u_n^n \right)$$

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n = 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} n u_n^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc, après passage à la limite, il reste : $\ell^2 - 3\ell + 1 = 0$.

Le discriminant de cette équation du second degré est égal à 5 donc cette équation admet deux solutions qui sont $\ell_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

- D'une part, on sait que $0 \le u_n \le \dfrac{1}{2}$ donc $0 \le \ell \le \dfrac{1}{2}$.
- D'autre part, comme $4 \le 5 \le 9$, on a $2 \le \sqrt{5} \le 3$, ce qui donne $\dfrac{5}{2} \le \ell_1 \le 3$ et

$0 \le \ell_2 \le \dfrac{1}{2}$.

Comme $\ell_1 > \dfrac{1}{2}$, la seule option est donc :

$$\boxed{\ell = \ell_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

Exercice 2

1) a) Soit M une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On a les équivalences suivantes :

$M \in E \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = M(a,b)$.

$$M \in E \Leftrightarrow \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que E est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par les deux matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) La famille (B,C) est donc génératrice de E et elle est libre car constituée de deux matrices non proportionnelles donc c'est une base de E et ainsi la dimension de E est égale à 2.

2) Les matrices de E sont symétriques donc diagonalisables.

En revanche, elles ont deux colonnes égales (la première et la troisième) donc elles ne sont pas inversibles.

3) On a $A = B + 3C$ donc $A = M(1,3)$, ce qui prouve que A appartient à E.

4) On peut proposer :

```
def matA():
    return np.array([[1,3,1],[3,-1,3],[1,3,1]])
```

5) a) Comme A appartient à E, la question 2) garantit que A n'est pas inversible, ce qui implique que 0 est valeur propre de A.

b) On a $A - 5I = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$ et la somme des trois colonnes est nulle, ce qui prouve que le rang de $A - 5I$ est strictement inférieur à 3, donc que $A - 5I$ n'est pas inversible.

De même, $A + 4I = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et on peut voir que la somme de la première colonne et de la troisième est égale au double de la deuxième, ce qui prouve que le rang de $A + 4I$ est strictement inférieur à 3, et ainsi $A + 4I$ n'est pas inversible.
Les deux autres valeurs propres de A sont donc -4 et 5.

c) Recherche des sous-espaces propres de A. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- Pour la valeur propre 0, on résout le système $AX = 0$ et on a :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ 3x - y + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 3y \\ 3x - y + 3(-x - 3y) = 0 \end{cases}$$

Finalement, on obtient :

$$AX = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x - 3y \\ -10y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -x \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ -x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Si on pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 0 est $\text{Vect}(U)$ et comme la famille (U) est constituée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de ce sous-espace propre.

- Pour la valeur propre 5, on résout le système $AX=5X$ et on a :

$$AX=5X \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+z=5x \\ 3x-y+3z=5y \\ x+3y+z=5z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ 3x-6y+3z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$$

On trouve (pivot de Gauss) :

$$AX=5X \overset{\substack{L_2\leftarrow 4L_2+L_1 \\ L_3\leftarrow 4L_3+L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ -5y+5z=0 \\ 15y-15z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+3y+z=0 \\ y=z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x+4z=0 \\ y=z \end{cases}.$$

Finalement, $AX=5X \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} z \\ z \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on pose $V=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5 est $\operatorname{Vect}(V)$ et comme la famille (V) est constituée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de ce sous-espace propre.

- Pour la valeur propre -4, on résout le système $AX=-4X$ et on a :

$$AX=-4X \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y+z=-4x \\ 3x-y+3z=-4y \\ x+3y+z=-4z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ 3x+3y+3z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+3y+5z=0 \end{cases}$$

On trouve (pivot de Gauss) :

$$AX=-4X \overset{\substack{L_2\leftarrow 5L_2-L_1 \\ L_3\leftarrow 5L_3-L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ 2y+4z=0 \\ 12y+24z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3y+z=0 \\ y=-2z \\ y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-5z=0 \\ y=-2z \end{cases}.$$

Finalement, $AX=-4X \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=-2z \end{cases} \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix}=z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si on pose $W=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, alors le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -4 est $\operatorname{Vect}(W)$ et comme la famille (W) est constituée d'un seul vecteur non nul, c'est une base de ce sous-espace propre.

- Pour conclure, la famille (U,V,W) est la concaténation des bases des sous-espaces propres de A et ces sous-espaces propres sont associés à des valeurs propres distinctes donc (U,V,W) est une famille libre. De plus, elle contient trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui est de dimension 3, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et, par construction, elle est bien formée de vecteurs propres de A.

6) D'après le script proposé, r_1 est le rang de $A-5I$.
Le théorème du rang donne $\mathrm{rg}(A-5I)+\dim\mathrm{Ker}(A-5I)=\dim\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})=3$ et comme $\mathrm{Ker}(A-5I)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 5, on a, grâce à la question 5c), $\dim\mathrm{Ker}(A-5I)=1$ d'où $r_1=2$.
Toujours d'après le script proposé, r_2 est le rang de $A+4I$, et le même raisonnement donne $\dim\mathrm{Ker}(A+4I)=1$, ce qui donne $r_2=2$.

7) a) Il suffit de tester U, V et W sur $M(a,b)$.
On a alors :

- $M(a,b)U=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=0\times U$ donc U est vecteur propre

de $M(a,b)$ associé à la valeur propre 0.

- $M(a,b)V=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a+b \\ 2a+b \\ 2a+b \end{pmatrix}=(2a+b)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(2a+b)V$ donc

V est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $2a+b$.

- $M(a,b)W=\begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2a-2b \\ 4b-4a \\ 2a-2b \end{pmatrix}=(2a-2b)\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}=(2a-2b)W$

donc W est vecteur propre de $M(a,b)$ associé à la valeur propre $2a-2b$.

Conclusion : U, V et W sont vecteurs propres de toutes les matrices de E.

b) La matrice P dont les colonnes sont les vecteurs U, V et W est inversible puisque (U,V,W) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et la relation de changement de base donne $M(a,b)=PDP^{-1}$, où D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres de $M(a,b)$ associées respectivement à U, V et W sur sa diagonale.

Une récurrence permet d'établir que $M(a,b)^n=PD^nP^{-1}$ et il reste à calculer P^{-1} pour obtenir par simple produit matriciel la matrice $M(a,b)^n$.

c) On peut proposer la fonction suivante :

```
def puissanceM(a,b,n):
   D=np.array([[0,0,0],[0,2*a+b,0],[0,0,2*a-2*b]])
   P=np.array([[1,1,1],[0,1,-2],[-1,1,1]])
   M=np.dot(P,np.dot(D**n,al.inv(P)))
   return M
```

Exercice 3 ....

1) • La fonction f_n est nulle donc positive sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$, et elle est positive sur $[0,n]$ car avec $x \leq n$, on a $1-\dfrac{x}{n} \geq 0$.

• Sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$, f_n est nulle donc continue, et sur l'intervalle $[0,n]$, f_n est continue car polynomiale. Ainsi, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en n.

• Les intégrales $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{n}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont nulles car f_n est nulle sur $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$. L'intégrale $\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment) et on a :

$$\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1} \mathrm{d}t = -n\int_0^n \underbrace{-\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}}_{u'u^{n-1}} \mathrm{d}t = -n\left[\underbrace{\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n}}_{u^n/n}\right]_0^n = -0+1=1$$

On a finalement $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0+1+0=1$.

Bilan : on peut conclure que f_n est une densité.

2) a) La fonction qui à t associe $\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)$ est nulle sur les intervalles $]-\infty,0[$ et $]n,+\infty[$ et elle est continue sur $[0,n]$ comme fonction polynomiale.

Par conséquent, les intégrales $\int_{-\infty}^{0}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ $\int_{n}^{+\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont nulles et l'intégrale $\int_0^n \left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ existe (intégrale d'une fonction continue sur un segment) donc $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\dfrac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge (absolument car les fonctions intégrées sont positives), ce qui prouve que $E\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)$ existe.

D'après le théorème de transfert, on a alors :

$$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right) f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

CORRIGÉ

On bricole un peu :

$$E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=-n\int_0^n \underbrace{-\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n}_{u'u^n}\mathrm{d}t=-n\left[\underbrace{\frac{1}{n+1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}}_{u^{n+1}/(n+1)}\right]_0^n.$$

On trouve enfin :

$$\boxed{E\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=\frac{n}{n+1}}$$

Avec la fonction qui à t associe $\left(1-\frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)$, on prouve de même que $E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existe et le théorème de transfert assure de plus :

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(1-\frac{t}{n}\right)^2 f_n(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^n\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}\mathrm{d}t$$

On bricole encore un peu :

$$E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=-n\int_0^n \underbrace{-\frac{1}{n}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+1}}_{u'u^{n+1}}\mathrm{d}t=-n\left[\underbrace{\frac{1}{n+2}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n+2}}_{u^{n+2}/(n+2)}\right]_0^n.$$

Cette fois, on obtient :

$$\boxed{E\left(\left(1-\frac{X_n}{n}\right)^2\right)=\frac{n}{n+2}}$$

b) En posant $Y_n=1-\frac{X_n}{n}$, on a $nY_n=n-X_n$ donc $X_n=n-nY_n$ et, comme Y_n possède une espérance, X_n en possède une aussi.

Par linéarité de l'espérance, on trouve :

$$E(X_n)=n-n\,E(Y_n)=n-n\times\frac{n}{n+1}=\frac{n(n+1)-n^2}{n+1}$$

On a finalement :

$$\boxed{E(X_n)=\frac{n}{n+1}}$$

Avec $Y_n=1-\frac{X_n}{n}$, on a, par propriété de la variance :

$$V(Y_n)=V\left(1-\frac{X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\,V(X_n)$$

On en déduit : $V(X_n)=n^2\,V(Y_n)$.

Il reste à calculer $V(Y_n)$ avec le théorème de Koenig-Huygens :

$$V(Y_n)=E(Y_n^2)-E(Y_n)^2=\frac{n}{n+2}-\left(\frac{n}{n+1}\right)^2$$

On obtient :

$$V(Y_n)=\frac{n(n+1)^2-n^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}=n\times\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}$$

Comme $V(X_n)=n^2V(Y_n)$, on trouve :

$$\boxed{V(X_n)=\frac{n^3}{(n+1)^2(n+2)}}$$

3) Par définition, on a $F_n(x)=\int_{-\infty}^{x}f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

- Pour $x<0$, on obtient : $F_n(x)=\int_{-\infty}^{x}0\,\mathrm{d}t=0$.
- Pour $x\in[0,n]$, on obtient :

$$F_n(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_0^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\mathrm{d}t=\left[-\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right]_0^x=-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n+1=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n.$$

- Pour $x>n$, on obtient : $F_n(x)=\int_{-\infty}^{0}0\,\mathrm{d}t+\int_0^n f_n(t)\,\mathrm{d}t+\int_n^{+\infty}0\,\mathrm{d}t=0+1+0=1$.

En résumé :

$$\boxed{F_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0\le x\le n\\ 1 & \text{si } x>n\end{cases}}$$

4) a) Pour tout réel x strictement négatif, on a $F_n(x)=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}F_n(x)=0$.

b) En fait, avec la deuxième ligne de l'accolade ci-dessus, dès que $n\ge x$, on a $F_n(x)=1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$. Comme $\lfloor x\rfloor\le x<\lfloor x\rfloor+1$, ceci est valable dès que $n\ge\lfloor x\rfloor+1$ (condition suffisante).

c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}-\frac{x}{n}=0$, on a l'équivalent $\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-\frac{x}{n}$, ce qui donne $n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\underset{+\infty}{\sim}-x$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)=-x$.

On peut donc conclure :

$$\boxed{\forall x \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right) = -x}$$

Remarque. Les puristes auraient peut-être voulu étudier à part le faux cas particulier $x=0$, pour lequel l'équivalent proposé se solde par $0 \underset{+\infty}{\sim} 0$, ce qui n'est pas faux.

d) Pour tout $x \geq 0$ et pour tout $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$, la question 4b) permet d'écrire $F_n(x) = 1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n = 1-\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right)$ donc, d'après la limite obtenue à la question 4c) et grâce à la continuité de la fonction exponentielle en $-x$, on obtient :

$$\forall x \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} F_n(x) = 1-\mathrm{e}^{-x}$$

En résumé, on a avec la question 4a) :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} F_n(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$

On peut conclure que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X suivant la loi exponentielle de paramètre 1.

5) a) D'après le cours traitant de la loi uniforme sur $[0,1]$, on a :

$$\boxed{G(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 \text{ si } x > 1 \end{cases}}$$

b) Pour tout réel x, on a :

$$P(Z_n > x) = P(n\ M_n > x) \overset{\overset{n>0}{\downarrow}}{=} P(M_n > x/n)$$

Dire que la variable M_n (qui prend la plus petite des valeurs prises par $U_1,\dots,U_n$) prend une valeur strictement supérieure à x/n, c'est dire que chacune des variables $U_1,U_2,\dots,U_n$ a pris une valeur strictement supérieure à x/n (en effet, si l'une des variables $U_1,\dots,U_n$ prenait une valeur inférieure ou égale à x/n, mécaniquement M_n aussi).

On a donc : $(Z_n > x) = \bigcap_{k=1}^{n}(U_k > x/n)$.

Comme $U_1, U_2, ..., U_n$ sont mutuellement indépendantes, on obtient :

$$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^{n} P(U_k > x/n)$$

Les variables U_k suivent la même loi, de fonction de répartition G, donc :

$$P(Z_n > x) = \prod_{k=1}^{n} \left(1 - G(x/n)\right) = \left(1 - G(x/n)\right)^n$$

D'après la question 5a), on sait que $G(x/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x/n < 0 \\ x/n & \text{si } 0 \le x/n \le 1 \\ 1 & \text{si } x/n > 1 \end{cases}$ et on en déduit : $G(x/n) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x/n & \text{si } 0 \le x \le n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}$.

En remplaçant dans $P(Z_n > x)$, on obtient :

$$\boxed{P(Z_n > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le x \le n \\ 0 & \text{si } x > n \end{cases}}$$

Comme la fonction de répartition de Z_n est la fonction F_{Z_n} définie par $F_{Z_n}(x) = P(Z_n \le x) = 1 - P(Z_n > x)$, on obtient :

$$\boxed{F_{Z_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n & \text{si } 0 \le x \le n \\ 1 & \text{si } x > n \end{cases}}$$

c) On voit, grâce aux résultats des questions 3) et 5b) que les fonctions de répartition de Z_n et X_n sont égales donc Z_n suit la même loi que X_n.

d) D'après la question 5c), simuler X_n revient à simuler Z_n donc, comme $Z_n = n \min(U_1, ..., U_n)$, on peut proposer :

```
def simulX(n):
  U=rd.random(n) # simulation de U1,...,Un
  return n*np.min(U)
```

CORRIGÉ

Problème ....

1) Pour la simulation de X_n, on peut proposer le code suivant où la variable informatique `X` contiendra à la fin la valeur prise par X_n, et dont la boucle `while` traduit le fait que tant qu'on pioche une boule noire on recommence et le nombre de tirages augmente d'une unité.
On peut donc proposer :

```
def varX(n):
    k=rd.randint(1,n+2)# choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=0 # l'urne n+1 n'a aucune boule blanche
    elif k==1:
        X=1 # l'urne 1 n'a que des boules blanches
    else:
        X=1 # maintenant, on peut initialiser X à 1
        while rd.randint(1,n+1)<=k-1:
            X=X+1
    return(X)
```

2) On choisit une urne au hasard (ce qui garantit l'équiprobabilité) et il y a $n+1$ urnes donc :

$$\boxed{P(U_k)=\frac{1}{n+1}}$$

3) a) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est la loi géométrique de paramètre $\dfrac{n-k+1}{n}$: en effet, comme on sait qu'on pioche dans l'urne numérotée k, on a affaire au rang de la première boule blanche lors de tirages avec remise (donc indépendants) pour lesquels la probabilité de piocher une boule blanche est égale à $\dfrac{n-k+1}{n}$.

b) Sachant quelle urne a été choisie, on connaît la loi conditionnelle de X_n donc on peut proposer :

```
else:
    X=rd.geometric((n-k+1)/n)
return(X)
```

4) a) L'urne numérotée $n+1$ ne contient aucune boule blanche donc on n'aura, à coup sûr, aucune boule blanche au premier tirage.
Par conséquent :

$$\boxed{P_{U_{n+1}}(X_n=1)=0}$$

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, on sait que la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$.

On a donc :

$$\boxed{P_{U_k}\left(X_n=1\right)=\frac{n-k+1}{n}}$$

c) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left(U_k\right)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$, tous de probabilité non nulle, s'écrit :

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n+1}P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$$

Le terme d'indice $n+1$ est nul donc on peut l'enlever sans changer la valeur de la somme, d'où :

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n}P(U_k)P_{U_k}(X_n=1)$$

Maintenant, on remplace tout ce que l'on connaît, ce qui donne :

$$P(X_n=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1}\times\frac{n-k+1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(n-k+1)$$

On pose $i=n-k+1$, ce qui inverse les bornes de la somme mais elles restent les mêmes : quand $k=1$, on a $i=n$ et quand $k=n$, on a $i=1$.

On obtient alors : $P(X_n=1)=\dfrac{1}{n(n+1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}i=\dfrac{1}{n(n+1)}\times\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Il reste à simplifier et on trouve :

$$\boxed{P(X_n=1)=\frac{1}{2}}$$

5) a) Même argument qu'à la question 4a) : l'urne numérotée $n+1$ ne contient aucune boule blanche donc on n'obtiendra jamais de boule blanche et en particulier, on n'aura aucune boule blanche au $j^{\text{ième}}$ tirage. On a donc :

$$\boxed{P_{U_{n+1}}\left(X_n=j\right)=0}$$

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, comme à la question 4b), on sait que la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k, est la loi géométrique de paramètre $\frac{n-k+1}{n}$ donc :

$$\boxed{P_{U_k}\left(X_n=j\right)=\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}\times\frac{n-k+1}{n}}$$

c) Toujours avec la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(U_k)_{k\in[\![1,n+1]\!]}$, on a, toujours en enlevant le terme d'indice $n+1$ qui est nul :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n+1} P(U_k)P_{U_k}(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} P(U_k)P_{U_k}(X_n = j)$$

On remplace : $\forall j \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \times \frac{n-k+1}{n}$.

Le changement d'indice $h = k-1$ donne :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{h}{n}\right)^{j-1} \times \frac{n-h}{n}$$

On en déduit : $\forall j \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} \times \left(\frac{h}{n}\right)^{j-1} \times \left(1-\frac{h}{n}\right)$

Il n'y a plus qu'à développer :

$$\forall j \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ P(X_n = j) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{n+1} \times \left[\left(\frac{h}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{h}{n}\right)^{j}\right]$$

L'indice d'une somme est muet donc on a bien :

$$\boxed{\forall j \in \mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]}$$

6) a) Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $-1 < 0 \le \frac{k}{n} < 1$ donc la série $\sum_j \left(\frac{k}{n}\right)^j$ est convergente et on peut scinder la somme $\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$ en deux sommes (puisque les séries créées sont convergentes).

On obtient alors :

$$\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{j} \overset{i=j-1}{=} \sum_{i=1}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{i} - \sum_{j=2}^{+\infty}\left(\frac{k}{n}\right)^{j} = \frac{k}{n}$$

(seul le terme d'indice $i=1$ de la première somme subsiste, les autres se simplifient).

b) Comme X_n prend des valeurs entières, on a $P(X_n \ge 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} P(X_n = j)$ sans problème de convergence de la série (sa somme est une probabilité).

On a donc :

$$P(X_n \ge 2) = \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

Pour chaque k de $[\![0,n-1]\!]$, on a vu que la série géométrique de raison $\frac{k}{n}$ est convergente donc on peut permuter les sommes, ce qui donne :

$$P(X_n \geq 2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

Grâce à la question 6a), on obtient :

$$P(X_n \geq 2) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}k$$

Pour $n=1$, on trouve $P(X_1 \geq 2)=0$ (la somme contient un seul terme égal à 0), et pour $n \geq 2$, on peut écrire, en enlevant le premier terme de la somme qui est nul :

$$P(X_n \geq 2) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{1}{n(n+1)}\times\frac{n(n-1)}{2}$$

Cette égalité reste valable pour $n=1$ puisque elle donne $P(X_1 \geq 2)=0$, donc on peut conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_n \geq 2) = \frac{n-1}{2(n+1)}}$$

7) a) La famille $([X_n=0],[X_n=1],[X_n \geq 2])$ est un système complet d'événements donc on a :

$$P(X_n=0)+P(X_n=1)+P(X_n \geq 2)=1$$

On en déduit :

$$P(X_n=0)=1-P(X_n=1)-P(X_n \geq 2) = 1-\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(n+1)}$$

On obtient $P(X_n=0)=\frac{1}{2}-\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{n+1}{2(n+1)}-\frac{n-1}{2(n+1)}=\frac{2}{2(n+1)}$ et enfin :

$$\boxed{P(X_n=0)=\frac{1}{n+1}}$$

b) En fait, ne jamais obtenir de boule blanche, c'est avoir choisi l'urne numérotée $n+1$ (car dans les autres urnes, par propriété de la loi géométrique, on tombera sur une boule blanche « un jour ou l'autre »). On a donc :

$$P(X_n=0)=P(U_{n+1})=\frac{1}{n+1}$$

8) a) Pour tout $j \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on a $j\,P(X_n = j) = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - j\left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$ et en mettant $j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1}$ en facteur dans la somme, on trouve :

$$j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Sommons pour j allant de 2 à N (avec $N \geq 2$) :

$$\sum_{j=2}^{N} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{N}\sum_{k=0}^{n-1} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)$$

Les sommes sont finies donc on peut les permuter :

$$\sum_{j=2}^{N} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}\left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{N} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

Comme à la question 6a), pour chaque k de $[\![0, n-1]\!]$, on a $-1 < \dfrac{k}{n} < 1$ donc la série géométrique dérivée première de terme général $j\left(\dfrac{k}{n}\right)^{j-1}$ est absolument convergente, ce qui prouve que $\displaystyle\sum_{j=2}^{N} j\,P(X_n = j)$ possède une limite finie quand N tend vers $+\infty$.

Par conséquent, la série de terme général $j\,P(X_n = j)$ est convergente (absolument convergente car à termes positifs) donc X_n possède une espérance.

De plus, après passage à la limite quand N tend vers $+\infty$, on obtient :

$$\sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

Il reste à compléter pour obtenir $E(X_n)$:

$$E(X_n) = 0\times P(X_n = 0) + 1\times P(X = 1) + \sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(X_n = j) = \frac{1}{2} + \sum_{j=2}^{+\infty} j\,P(X_n = j)$$

On obtient donc :

$$E(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1}$$

D'après le cours, on a $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2}$ donc $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)^2} - 1$ et ainsi : $\displaystyle\left(1-\frac{k}{n}\right)\sum_{j=2}^{+\infty} j\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{k}{n}\right)} - \left(1-\frac{k}{n}\right) = \frac{n}{n-k} - \frac{n-k}{n}$.

On en déduit : $E(X_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{n}{n-k}-\dfrac{n-k}{n}\right)$.

En posant $p=n-k$, on trouve successivement :

$E(X_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\left(\dfrac{n}{p}-\dfrac{p}{n}\right)$.

$E(X_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\dfrac{n}{p}-\dfrac{1}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\dfrac{p}{n}$.

$E(X_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n(n+1)}\sum_{p=1}^{n}p$.

$E(X_n)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{2}$.

Conclusion :

$$\boxed{E(X_n)=\frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}}$$

b) On peut proposer :

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=np.sum(1/v)*n/(n+1)
print(E)
```

9) a) $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ \ \forall t\in[p,p+1],\ \ \dfrac{1}{p+1}\le\dfrac{1}{t}\le\dfrac{1}{p}$ (par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$).

On intègre ces fonctions continues entre p et $p+1$ (bornes dans l'ordre croissant) et on trouve :

$$\boxed{\frac{1}{p+1}\le\int_p^{p+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{p}}$$

b) Sommons l'encadrement précédent pour p allant de 1 à $n-1$ (avec $n\ge 2$) :

$$\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p+1}\le\sum_{p=1}^{n-1}\int_p^{p+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$$

La relation de Chasles pour les intégrales et le changement d'indice $i=p+1$ dans la première somme permettent d'écrire :

$$\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\le\int_1^{n}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$$

CORRIGÉ

En revenant à l'indice p et après calcul de l'intégrale restante, on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}}$$

c) On utilise l'encadrement précédent en séparant les deux inégalités.

L'inégalité de gauche fournit $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - 1 \leq \ln(n)$, soit :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1 \qquad (1)$$

L'inégalité de droite fournit $\ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, soit :

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \qquad (2)$$

En regroupant (1) et (2), on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1}$$

d) En divisant l'encadrement précédent par $\ln(n) > 0$ (car $n \geq 2$), on trouve :

$$\forall n \geq 2,\ 1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leq \frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

Or $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n\ln(n)}\right) = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\ln(n)}\right) = 1$, donc par encadrement, on trouve :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}}{\ln(n)} = 1$$

Ceci montre que $\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$.

Pour finir, on sait que $E(X_n) = \frac{n}{n+1} \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$, et comme $\frac{n}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on a :

$$\boxed{E(X_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)}$$