

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES INFORMATIQUE

Pour consolider les acquis du lycée et réussir le 1^{er} semestre

ECG
1^{er} semestre

Sébastien Krief-Détraz



Préparer sa rentrée

Sommaire

1	Calculs et simplifications	5
2	Expressions	6
3	C'est logique	6
4	R.T.T.	8
5	Last Fraction Hero	8
6	Le Factorisathon	8
7	La racine, c'est carré	9
8	Rester dans le cadre	9
9	Sine Qua Tion	10
10	Entre parenthèses	10
11	VouF ?	11
12	Qui est « in » qui est « out »	11
13	Affiner	12
14	R.T.T. : le retour	12
15	À la dérive	13
16	Hélène & Eudes	13
	Solutions	13

Voici de quoi bien se préparer pour une rentrée efficace. Rien n'empêche d'y revenir plus tard d'ailleurs car tout ceci se doit d'être parfaitement maîtrisé.

1 Calculs et simplifications

Calculer, simplifier ou compléter les items suivants.

(a) $3 - 5 + 1 - 19$	(f) $(4 - 5)^2$	(k) $3 - \frac{13}{11}$	(p) $\frac{3}{4} \times \frac{5}{7}$
(b) $(-3)^2$	(g) $4^2 - 5^2$	(l) $\frac{12}{16} - \frac{21}{28}$	(q) $\frac{2}{5} \frac{3}{4} \frac{5}{6}$
(c) -5^2	(h) $2^3 - 3^2$	(m) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6}$	(r) $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$
(d) $7 - 3 \times 5$	(i) $\frac{2}{3} + \frac{4}{5}$	(n) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$	
(e) $-23 - 4 \times 3^2$	(j) $\frac{81}{27} + 1$	(o) $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}$	

(s) $\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{9}}$	(x) $\frac{3 \times 4}{3 \times 2}$	(γ) $2^4 \cdot 2^3$	(ι) $\frac{(a^4)^2 \cdot b^{-5}}{(ab)^{-1}}$
(t) $\frac{3-5}{5}$	(y) $\frac{2+4}{2+1}$	(δ) $\frac{6^2}{6^3}$	(κ) $(\frac{a}{b^{-1}})^5 \cdot \frac{b}{a \times a^3}$
(u) $\frac{1}{3} - \frac{4}{5} \times \frac{5}{3}$	(z) $3 + \frac{2}{5} - \frac{3}{4} \frac{2}{5}$	(ε) $3^2 \cdot 3^{-5}$	(λ) $7 = 3 \times \dots$
(v) $(\frac{3}{4})^2 - \frac{5}{8}$	(α) $2^3 \cdot 5^3$	(ζ) $(2^3)^{-4}$	(μ) $\frac{2}{3} = 5 \times \dots$
(w) $\frac{\frac{1}{2} - 2}{\frac{1}{3} - 3}$	(β) $\frac{4^5}{8^5}$	(η) $6^4 \cdot 15^{-2}$	(ν) $x^5 = x^3 \times \dots$
		(θ) $a^{2^3} a^{-5}$	(ξ) $y^{n+3} = y^5 \times \dots$

2 Expressions

1. n désignant un nombre entier, donner l'expression des nombres suivants.

(a) Le double de n .	(e) Le tiers de n .
(b) L'opposé de n .	(f) Le nombre entier qui précède n .
(c) Le triple de n .	(g) La différence de n et de 3.
(d) Le nombre entier qui suit n .	(h) La somme de 4 et de la moitié de n .

2. Soit f le nombre de filles et g le nombre de garçons dans une classe.

Traduire chacun des énoncés suivants par une égalité ou une inégalité.

(a) Il y a autant de filles que de garçons.	(f) Si l'on double le nombre de garçons, on obtient trois garçons de plus que de filles.
(b) Il y a quatre garçons de plus que de filles.	(g) Il y a plus de filles que de garçons.
(c) Il y a cinq filles de moins que de garçons.	(h) Il y a plus du triple de garçons que du double de filles.
(d) Il y a trois fois plus de filles que de garçons.	(i) Les garçons sont moins de trois fois plus nombreux que les filles.
(e) Il y a deux fois moins de garçons que de filles.	(j) Les filles sont plus de deux fois moins nombreuses que les garçons.

3 C'est logique

- (α) Vrai ou Faux ? Justifiez.

Attention, ceci n'est pas une blague, répondez donc en toute logique.

- Les étoiles sont immortelles, Socrate est immortel donc Socrate est une étoile.
- Tous les éléphants roses vivent en Antarctique. Or Barbar est un éléphant qui vit en Antarctique donc Barbar est rose.
- On sait que si les petits pois sont rouges, alors il ne sont pas comestibles. Or Némó est un poisson rouge, donc il n'est pas comestible.
- Lors d'un certain radio-crochet, aucun candidat ne sait chanter. Or certaines casseroles le savent, donc quelques casseroles ne sont pas candidates.

- (β) A. Choisir la réponse correcte sachant que la phrase suivante est supposée vraie :
 « Si la télé est allumée, alors il y a nécessairement quelqu'un qui la regarde. »
- La télé est allumée. Quelqu'un la regarde-t-il ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
 - Personne ne regarde la télé. Est-elle allumée ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
 - La télé est éteinte. Quelqu'un la regarde-t-il ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
 - Quelqu'un regarde la télé. Est-elle allumée ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
- B. Même consigne pour la phrase : « L'équation (E) n'a pas de solution négative. »
- Est-ce que -2 est une solution de (E) ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
 - a est une solution de (E) . Est-ce que a est négatif ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
 - 3 est-il une solution de (E) ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
 - b n'est pas une solution de (E) . Est-ce que b est négatif ?
 A. Oui. B. Non. C. On ne peut savoir.
- (γ) Compléter par « donc » ou « car ».
- J'ai eu un accident ... j'ai grillé un feu rouge.
 - Il est malade ... il ne viendra pas.
 - J'ai eu un cadeau ... c'est mon anniversaire.
 - Je ne suis pas européen ... je ne suis pas allemand.
 - Jean est triste ... c'est la fin des vacances.
 - Il pleut ... la fête est annulée.
 - (AB) et (CD) sont parallèles ... $ABCD$ est un parallélogramme.
 - $ABCD$ possède deux angles droits ... c'est un rectangle.
 - Le triangle ABC est équilatéral ... il est isocèle.
 - $y^2 = 25$... $y = 5$.
 - $x \in [-1; 4]$... $x \in [-2; 5]$.
 - $u^2 \geq 49$... $u \geq 7$.
 - $\sqrt{x} \leq 6$... $x \leq 36$.
- (δ) (N2) Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse.
- Pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.
 - Pour prouver qu'elle est vraie, il est nécessaire de trouver une démonstration.
- Si $x^2 \geq 4$ alors $x \geq 2$.
 - Pour tous réels x et y , $(x + y)^3 = x^3 + y^3$.
 - Pour tout réel x , le réel $-10x$ est négatif.
 - Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle.
 - Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes.
 - Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ est un entier naturel.

4 R.T.T.

Résoudre de TêTe les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

« Micro-brouillon » autorisé pour les plus difficiles. Ne pas oublier de tester les réponses.

(a) $x + 4 = 6$	(k) $x^2 = 16$	(u) $\sqrt{3-x} \geq 5$
(b) $5t + 7 = 1$	(l) $z^2 + 3 = 0$	(v) $\frac{1}{z} \geq \frac{1}{2}$
(c) $2 - 3q \geq 4$	(m) $w^2 + 9 \leq 0$	(w) $\frac{1}{x} < 3$
(d) $y - 5 \geq 2y - 3$	(n) $x^2 \geq 25$	(x) $\frac{1}{t^2 + 3} = \frac{1}{5}$
(e) $z - 1 < z + 1$	(o) $3u^2 + 4 = 1$	(y) $(x-1)(x+4)(x-3) > 0$
(f) $u + v + 3 > 5u + v - 1$	(p) $x^2 - 9 < 0$	(z) $3 - \frac{2}{p} \leq 1$
(g) $u^2 + v^2 - 2uv \geq 0$	(q) $z^2 - 4z + 4 = 0$	
(h) $3 - 2x \leq -2x - 5$	(r) $3y^2 - 2y - 1 = 0$	
(i) $6 - 3x \leq 0$	(s) $u^2 - 6u + 9 > 0$	
(j) $x^2 - 1 = 0$	(t) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$	

5 Last Fraction Hero

Calculer, simplifier, réduire,... le plus rapidement possible, le plus souvent possible « de tête » et de toutes façons, sans calculatrice et sans se préoccuper des éventuels problèmes de définition.

(a) $\frac{1}{3} + \frac{5}{4}$	(h) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$	(n) $2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2}}}}$
(b) $\frac{5}{7} - \frac{3}{2}$	(i) $\frac{3x}{x-2} + \frac{1-4x}{3x}$	(o) $x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}$
(c) $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{2}$	(j) $\frac{7a}{7a+1} + \frac{3a}{2-3a}$	(p) $\frac{\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-2}}$
(d) $\frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{7}{4} - 3}$	(k) $\frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{1-2x}}{x - \frac{2x}{x+1}}$	(q) $\frac{\frac{5x^2-10x-15}{2x-1}}{\frac{3+2x-x^2}{4-8x}}$
(e) $\frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{7}}{1+2}$	(l) $\frac{\frac{2}{y+4} - \frac{3}{3-2y}}{-\frac{y}{y+4} + \frac{1}{y}}$	
(f) $\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{10}{4} - \frac{3}{5} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{2}{7}$	(m) $1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}$	
(g) $\frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{10}{6} \cdot \frac{3}{14}}{\frac{5}{28} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{8}{3}}$		

6 Le Factorisathon

Rappeler les trois identités remarquables ainsi que les identités « $ka \pm \dots$ ».

Factoriser ensuite le plus possible les expressions suivantes.

(a) $9 - 6u + u^2$	(e) $(1+x)(x+4) + 6(x+4)$
(b) $49 - 4y^2$	(f) $x^2 - 9$
(c) $16x^2 + 40x + 25$	(g) $4t^2 - \frac{16}{9}$
(d) $4(x-1)^2 + 8(x-1) + 1$	(h) $2(q+1)^2 + (1-q)(1+q)$

- | | |
|---|---|
| (i) $(2t+3)^2 - (1+t)(2t+3)$ | (o) $3(2x-1)^2 + 6(-1+2x)(7-4x)$ |
| (j) $(2A+3)^2 - 25$ | (p) $(5+u)(3u-1) + 6(3u-1)(5-2u)$ |
| (k) $\varphi^3 - 4\varphi + 3\varphi^2$ | (q) $3x^2 - 10$ |
| (l) $1 - 4x^2$ | (r) $-\frac{1}{4}(n-2)3n + (2-n)^2(1+4n)$ |
| (m) $4(5+t)(1-6t) + 7(t+5) + 3(t+5)^2$ | (s) $25y^2 - 9 + (-2y+5)(5y-2) - 5 + 2y$ |
| (n) $3(2z-3)^2 - 3(5-z)^2$ | |

7 La racine, c'est carré

En préambule, rappelons la définition suivante :

Définition & Propriété Soit a un
 La racine carrée de a est de valant
 Pour $a \in \dots$, = a et $\sqrt{a}$ est

Calculer, simplifier, résoudre et/ou écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ les écritures suivantes. N'utiliser la calculatrice qu'en tout dernier ressort.

- | | | | |
|-----------------------------|----------------------------------|--|------------------------------------|
| (a) $\sqrt{49}$ | (i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4}$ | (q) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{10}$ | (v) $\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}}$ |
| (b) $-\sqrt{64}$ | (j) $\sqrt{(-9) \times (-4)}$ | (r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28}$ | (w) $x^2 - 9 = 0$ |
| (c) $(-\sqrt{79})^2$ | (k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4}$ | (s) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | (x) $y^2 - 18 = 0$ |
| (d) $-\sqrt{127^2}$ | (l) $\sqrt{32}$ | (t) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$ | (y) $-3z^2 - 5 = 0$ |
| (e) $\sqrt{-25^2}$ | (m) $\sqrt{72}$ | (u) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}}$ | (z) $3 - 5t^2 = 0$ |
| (f) $\sqrt{36} + \sqrt{64}$ | (n) $\sqrt{300}$ | | |
| (g) $\sqrt{36+64}$ | (o) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27}$ | | |
| (h) $\sqrt{9 \times 4}$ | (p) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{6}$ | | |

VouF ?

- (α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$.
 (β) La racine carrée de la somme de deux réels positifs égale la somme de leur racine carrée.
 (γ) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée.
 (δ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci.

8 Rester dans le cadre

Donner le meilleur encadrement des nombres suivants sachant que $x \in [2; 5]$ et $y \in]-3; 4]$.

- | | | | |
|--------------|----------------------|--------------------|-------------------|
| (a) $7x + 3$ | (c) $3x - 2y - 8$ | (e) $-2y^2$ | (g) $6xy$ |
| (b) $1 - 4y$ | (d) $\frac{-5}{x+1}$ | (f) $x^2 - 2x + 1$ | (h) $\frac{y}{x}$ |

9 Sine Qua Tion

1. Pour chacune des équations suivantes, exprimer formellement chacune des variables en fonction des autres.

(a) $x + y - 5 = 0$	(f) $4fg - 3f + 2g = 0$	(i) $3xy - 2yz = 5 - 7xyz$
(b) $u - v + 2 = 0$	(g) $u + 1 = \frac{d}{t}$	(j) $k^2 = j + 2$
(c) $3a - 2b = 7$	(h) $\frac{3}{4}at - 7\frac{t}{x} + 2 = 0$	(k) $r^2 - 2r + 1 = 7s + 3$
(d) $\alpha - 3\beta + 5\gamma + 6 = 0$		(l) $m^2 - 4m = n^2 - 4$
(e) $\frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}A - 5 = 0$		

2. Même type d'exercice pour les inéquations suivantes.

(m) $x + y > 3$	(o) $5p - 3q - 2 \geq 4$	(q) $\frac{u}{v} \leq -2$
(n) $a - b + 4 < 0$	(p) $3 - 2f + 4g \leq 1$	(r) $ab - a > 1$

3. (N2) Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants, en utilisant différentes méthodes : substitution, combinaison linéaire, un peu des deux.

(s) $\begin{cases} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{cases}$	(x) $\begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 4n = 2m + 6 \end{cases}$
(t) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$	(y) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$
(u) $\begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$	(z) $\begin{cases} a + 2b + c = 4 \\ 2a - 3b + 5c = 0 \\ 3a - b + 2c = 1 \end{cases}$
(v) $\begin{cases} 2u - 4v = 3u - 7v + 1 \\ 5u + 2v - 4 = 1 \end{cases}$	
(w) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6y = 7 + 4x \end{cases}$	

10 Entre parenthèses

On pose $A(x) = x+4$, $B(x) = 3x-2$, $C(x) = 7-x$ et $D(x) = 1-2x$.

1. (N2) Développer et réduire les expressions suivantes (attention, $E^3(u) = [E(u)]^3$).

(a) $-4B(x)$	(g) $B(x)C(x) - A(x)D(x)$
(b) $C(x) - 3D(x)$	(h) $5B^2(x) - 4C^2(x)$
(c) $-3A(x) - 5C(x)$	(i) $-5D^3(x)$
(d) $A(x)B(x)$	(j) $B^4(x)$
(e) $C(x)D(x)$	(k) $-2B(x)A^2(x) - 3C^2(x)D(x)$
(f) $A^2(x)D(x)$	(l) $\frac{A(x)}{B(x)C(x)} - \frac{B(x)}{C(x)D(x)}$

2. Calculer de tête les nombres suivants.

(m) $A(-6)$	(o) $C(-3) - D(-4)$	(q) $D^2(-\frac{3}{2})$
(n) $B(-4)$	(p) $C^2(-1)$	(r) $-3D(-1)C(-4)A(-5)$

3. (N2) Exprimer en fonction de x les expressions suivantes.

$$\begin{array}{l|l|l} \begin{array}{l} \text{(s)} \quad A(x^2) \\ \text{(t)} \quad D(x+1) \\ \text{(u)} \quad B(3-2x) \end{array} & \begin{array}{l} \text{(v)} \quad -4A(x-3) \\ \text{(w)} \quad -3B(5-3x^2) \\ \text{(x)} \quad -2D^2(4-2x^2) \end{array} & \begin{array}{l} \text{(y)} \quad C(4-x^2)D(2x+4) \\ \text{(z)} \quad \frac{B(2x+1)-C(3x-1)}{A(x-1)D(3-4x)} \end{array} \end{array}$$

11 VouF ?

Sauf précision contraire, les fonctions sont définies et dérivables sur les ensembles $\mathcal{D}$, les équations et inéquations doivent être vérifiées sur tout leur ensemble de définition.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

- | | |
|--|--|
| <p>(a) Si $x > 3$, alors $x \geq 2$.</p> <p>(b) Si $a < 5$, alors $a \leq 4$.</p> <p>(c) Si $\frac{1}{b} \geq 3$, alors $b \leq \frac{1}{3}$.</p> <p>(d) Si $u \leq \frac{1}{2}$, alors $\frac{1}{u} \geq 2$.</p> <p>(e) $x^2 - 2x + 5$ n'admet pas de racines réelles.</p> <p>(f) $3x^2 + x - 4$ admet 1 et -4 pour racines.</p> <p>(g) $\sqrt{2}x^2 - 4x + \sqrt{3}$ n'admet pas de forme factorisée.</p> <p>(h) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$.</p> <p>(i) $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x^2$.</p> <p>(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$.</p> <p>(k) $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 5 = 11$.</p> <p>(l) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 0$.</p> <p>(m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$.</p> <p>(n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5-x} = 0^-$.</p> <p>(o) Si f' est positive sur l'intervalle $\mathcal{D}$ alors f est croissante sur $\mathcal{D}$.</p> <p>(p) Si f' est négative sur le domaine $\mathcal{D}$ alors f est décroissante sur $\mathcal{D}$.</p> <p>(q) Si f admet un extremum local en $a \in \mathcal{D}$, alors $f'(a) = 0$.</p> | <p>(r) Si $a \in \mathcal{D}$ est tel que $f'(a) = 0$, alors f admet un extremum local en a.</p> <p>(s) Si f est croissante alors f est positive.</p> <p>(t) $(fg)' = f'g'$</p> <p>(u) $(\frac{1}{g})' = \frac{1}{g^2}$</p> <p>(v) Si $f(x) = 2(x-2)(3x^2+5)$ alors $f'(x) = 12x^2 - 12x + 10$.</p> <p>(w) Si $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$ alors $f'(x) = \frac{13}{5x-1}$.</p> <p>(x) Si $u_0 = 3, u_1 = -6, u_2 = 12$ alors $u_3 = -24$.</p> <p>(y) Si (u_n) est géométrique et $u_1 = 3$ alors $u_2 = 9$.</p> <p>(z) Si (u_n) est arithmétique, $u_3 = 5$ et $u_6 = 20$ alors $u_1 = -5$.</p> <p>(α) On a toujours $\mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.</p> <p>(β) On a toujours $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.</p> <p>(γ) Si on lance un dé cubique, alors $\mathbb{P}(\{4\}) = \frac{1}{6}$.</p> <p>(δ) Si on lance deux dés cubiques équilibrés, alors $\mathbb{P}(\{Som. = 8\}) = \mathbb{P}(\{Som. = 9\})$.</p> |
|--|--|

12 Qui est « in » qui est « out »

VouF ? Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

- (a) $5 \in \{x \in \mathbb{R} \mid 3x - 15 = 0\}$
- (b) $-4 \in \{y \in \mathbb{R}_+ \mid 2y + 8 = 0\}$
- (c) $-2 \in \{z \in \mathbb{R} \mid \frac{z}{2} \in \mathbb{Z} \text{ et } 3z + 6 = 0\}$

- (d) $-3 \in \{u \in \mathbb{R} \mid u^2 + 9 = 0 \text{ ou } 4u = -7\}$
 (e) $(2, 3) \in \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = 0\}$
 (f) $(u, 2u) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 2a - b = 0\}$
 (g) $(4, 3) \in \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 3u - 4v = 0 \text{ et } \frac{1}{2}u - 3v = 0\}$
 (h) $(1, 2) \in \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid 4a - b = 0 \text{ ou } a + 2b = 5\}$
 (i) $(2, 5) \in \{(f, g) \in \mathbb{R}^2 \mid 10f - 4g = 0 \text{ et } 3f - 2g + 5 = 1\}$
 (j) $(4, 3) \in \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 \mid z \geq t \text{ ou } z + t \geq 0\}$

13 Affiner

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer si elle est affine ou non et, le cas échéant, préciser son coefficient directeur, son ordonnée à l'origine et sa racine éventuelle.

$\alpha(x) = 2x - 1$	<i>alpha</i>	$\mathfrak{t}(x) = bx + a$	<i>iota</i>	$\rho(z) = m^2z + p^2$	<i>rho</i>
$\beta(x) = 3 - 5x$	<i>bêta</i>	$\kappa(a) = ax + b$	<i>kappa</i>	$\sigma(m) = m^2z + p^2$	<i>sigma</i>
$\gamma(u) = -\frac{4u}{3} - \frac{5}{7}$	<i>gamma</i>	$\lambda(b) = ax + b$	<i>lambda</i>	$\tau(p) = m^2z + 3p + 1$	<i>tau</i>
$\delta(y) = -6y$	<i>delta</i>	$\mu(z) = ax + b$	<i>mu</i>	$\upsilon(x) = 3x - 4d - cx$	<i>upsilon</i>
$\varepsilon(t) = 2$	<i>epsilon</i>	$\nu(x) = -mx + 2p$	<i>nu</i>	$\varphi(x) = \frac{ax}{b}$	<i>phi</i>
$\zeta(z) = 3x + 2$	<i>zêta</i>	$\xi(a) = 2ax - 3b$	<i>ksi/xi</i>	$\chi(x) = \frac{3}{x}$	<i>khi/chi</i>
$\eta(x) = ax + b$	<i>êta</i>	$\omicron(x) = fx$	<i>omicron</i>	$\psi(t) = 5 - \frac{2}{x}$	<i>psi</i>
$\theta(x) = b + ax$	<i>thêta</i>	$\pi(f) = x + f$	<i>pi</i>	$\omega(x) = Xx + X$	<i>oméga</i>

14 R.T.T. : le retour

(N2) Résoudre de TêTe les équations et inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

(α) $3x + 5 = -1$	($\mathfrak{t}$) $v^2 = 7$	(ρ) $5(a - 3)(a + 2) < 0$
(β) $7 - 2c = 4$	(κ) $5y^2 - 1 = 0$	(σ) $(11 - 2x)(4 + 3x) \leq 0$
(γ) $4 + 2y \geq -5$	(λ) $3 - 4z^2 = 1$	(τ) $\sqrt{b + 5} \leq 3$
(δ) $5 - 6z \leq 4$	(μ) $t^2 + 4 = 0$	(υ) $\sqrt{3 - q} < 5$
(ε) $2t + 1 > 5t - 2$	(ν) $x^2 - 3x + 2 = 0$	(φ) $\sqrt{7 - 2p} > 2$
(ζ) $-7u - 4 < -9 - 2u$	(ξ) $5 - 2p^2 + 3p = 0$	(χ) $ 5 - w < 2$
(η) $\frac{3}{x} \geq \frac{2}{5}$	($\omicron$) $r^2 > 1$	(ψ) $ \ell^7 > -4$
(θ) $-\frac{2}{y} < \frac{3}{7}$	(π) $x^2 - 6 \leq 0$	(ω) $ x + 4 > 3$

15 À la dérive

Dériver les fonctions suivantes, sans tenir compte des éventuels problèmes de définition.

$$\begin{array}{l|l|l} a(x) = (7x+3)(6-3x) & d(x) = \frac{-3}{6-5x} & g(x) = \sqrt{5-8x} \\ b(x) = (3x^4-7x^3-5)(8-3x^5) & e(x) = \frac{4x-3}{7-3x} & h(x) = \frac{-7}{\sqrt{9-4x^2}} \\ c(x) = (5-2x)(4-3x)(8-x) & f(x) = \frac{6x^2-3x+1}{5-4x+2x^3} & i(x) = \frac{(5x^3-4x^2-2)(3x^4-7x+3)}{(6-5x)^3} \end{array}$$

16 Hélène & Eudes

1. Simplifier les écritures suivantes :

$$(a) \quad e^{-x}e^2 \quad \Bigg| \quad (b) \quad (e^x)^3 e^{-2x} \quad \Bigg| \quad (c) \quad \frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} \quad \Bigg| \quad (d) \quad \frac{e^{3u-2} e^{7-3u}}{e^{3-u} e^{u+2}}$$

2. Développer puis réduire :

$$(a) \quad (e^x + e^{-2x})^2 \quad \Bigg| \quad (b) \quad (e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x) \quad \Bigg| \quad (c) \quad (e^{3x} - e^{5x})^2$$

3. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$\begin{array}{l|l|l} (a) \quad e^{x^2} = e^{-x} & (c) \quad e^{2x^2+3} = e^{7x} & (e) \quad 3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \\ (b) \quad e^{2x} < e^x & (d) \quad e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}} & (f) \quad e^x \leq e^{x^2-12} \end{array}$$

4. Dériver les fonctions suivantes sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\begin{array}{l|l|l} a(x) = e^{2x+1} & c(x) = (x+1)e^{-x} & f(x) = \frac{e^x}{e^x-1} \\ b(x) = e^{-x} + \sqrt{e^{2x}} & d(x) = xe^{\sqrt{x}} & g(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \end{array}$$

5. Simplifier les écritures suivantes (a et $b \in]0; +\infty[$).

$$\begin{array}{l|l} (a) \quad \frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}} & (f) \quad \ln(e^{a-b}) - e^{\ln(a)} + \exp(\ln(b)) \\ (b) \quad \ln(3) + \ln(\frac{1}{3}) & (g) \quad \exp(\ln(a) + \ln(b)) - \exp(\ln(a) - \ln(b)) \\ (c) \quad \ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) & (h) \quad \ln(\frac{a}{b}) - \ln(a^2) + \ln(\sqrt{b}) + \frac{3}{2} \ln(\frac{a^2}{\sqrt{b}}) \\ (d) \quad \ln(4) - \ln(9) - 5\ln(2) + 2\ln(3) + \ln(8) & (i) \quad \ln(a^2b) - \ln(b^2a) + \ln(\frac{a}{b^3}) \\ & \quad + 2\ln(\frac{b}{a}) - \frac{1}{2} \ln(a^4b^6) \\ (e) \quad \frac{1}{2} \ln(16) - \frac{3}{2} \ln(4) + \ln(9) & (j) \quad \frac{3\ln(\frac{b}{a}) + \ln(a^3) - \ln(\sqrt{b})}{\ln(\frac{b}{a}) - 2\ln(\sqrt{b}) - \ln(\frac{1}{\sqrt{a^7}})} \\ & \quad + \frac{1}{3} \ln(8) - \frac{1}{2} \ln(81) \end{array}$$

Solutions

1 Calculs et simplifications

$$\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l} (a) \quad -20 & (e) \quad -59 & (i) \quad \frac{22}{15} & (m) \quad \frac{19}{12} & (q) \quad \frac{1}{4} & (u) \quad -1 & (y) \quad 2 \\ (b) \quad 9 & (f) \quad 1 & (j) \quad 4 & (n) \quad \frac{31}{30} & (r) \quad \frac{14}{15} & (v) \quad -\frac{1}{16} & (z) \quad \frac{31}{10} \\ (c) \quad -25 & (g) \quad -9 & (k) \quad \frac{20}{11} & (o) \quad \frac{3}{4} & (s) \quad 6 & (w) \quad \frac{9}{16} & \\ (d) \quad -8 & (h) \quad -1 & (l) \quad 0 & (p) \quad \frac{15}{28} & (t) \quad -\frac{2}{5} & (x) \quad 2 & \end{array}$$

$ \begin{aligned} (\alpha) \quad & 2^3 \cdot 5^3 = (2 \times 5)^3 \\ (\beta) \quad & \frac{4^5}{8^5} = \frac{4^5}{(2 \times 4)^5} = \frac{1}{2^5} \\ (\gamma) \quad & 2^4 \cdot 2^3 = 2^{3+4} = 2^7 \\ (\delta) \quad & \frac{6^2}{6^3} = 6^{2-3} = 6^{-1} = \frac{1}{6} \\ (\varepsilon) \quad & 3^2 \cdot 3^{-5} = 3^{2-5} = 3^{-3} = \frac{1}{3^3} \\ (\zeta) \quad & (2^3)^{-4} = 2^{3 \times (-4)} = 2^{-12} = \frac{1}{2^{12}} \\ (\eta) \quad & 6^4 \cdot 15^{-2} = \frac{2^4 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2} = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^{-2}. \end{aligned} $	$ \begin{aligned} (\theta) \quad & a^{2^3} a^{-5} = a^{8-5} = a^3 = a^3 b^0 \\ (\iota) \quad & \frac{(a^4)^2 \cdot b^{-5}}{(ab)^{-1}} = a^{4 \times 2 - (-1)} b^{-5 - (-1)} = a^9 b^{-4} \\ (\kappa) \quad & \left(\frac{a}{b^{-1}}\right)^5 \cdot \frac{b}{a \times a^3} = a^{5-1-3} b^{-(-1) \times 5 + 1} = a^1 b^6 \\ (\lambda) \quad & 7 = 3 \times \frac{7}{3} \\ (\mu) \quad & \frac{2}{3} = 5 \times \frac{2}{15} \\ (\nu) \quad & x^5 = x^3 \times x^2 \\ (\xi) \quad & y^{n+3} = y^5 \times y^{n-2} \end{aligned} $
--	---

2 Expressions

1. (a) $2n.$	(c) $3n.$	(e) $\frac{1}{3}n.$	(g) $n - 3.$
(b) $-n.$	(d) $n + 1.$	(f) $n - 1.$	(h) $4 + \frac{1}{2}n.$

2. (a) $f = g$	(c) $f = g - 5$	(e) $g = \frac{1}{2}f$	(g) $f > g$	(i) $g < 3f$
(b) $g = f + 4$	(d) $f = 3g$	(f) $2g = f + 3$	(h) $3g > 2f$	(j) $f > \frac{1}{2}g$

3 C'est logique

- (α) (a) Faux. Tout ce qui est immortel n'est pas nécessairement une étoile.
 (b) Faux. Tous les éléphants qui vivent en Antarctique ne sont pas nécessairement roses.
 (c) Faux. Nous n'avons aucune information sur les poissons rouges.
 (d) Vrai. Les casseroles sachant chanter ne peuvent être candidates.
- (β) A. 1 - Oui. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.
 B. 1 - Non. 2 - Non. 3 - On ne peut savoir. 4 - On ne peut savoir.
- (γ) (a) car | (c) car | (e) car | (g) car | (i) donc | (k) donc | (m) donc
 (b) donc | (d) donc | (f) donc | (h) car | (j) car | (l) car
- (δ) (a) Si $x^2 \geq 4$ alors $x \geq 2$: Faux. $x = -3$ par exemple.
 (b) Pour tous réels x et y , $(x+y)^3 = x^3 + y^3$: Faux. $x = y = 1$ par exemple.
 (c) Pour tout réel x , le réel $-10x$ est négatif : Faux. $x = -1$ par exemple.
 (d) Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle : Vrai. $x^2 + 1 = 0$ par ex.
 (e) Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes : Vrai.
 $x(x-1)(x+1)(x-2)(x+2) = 0$ par exemple.
 (f) Si a et b sont deux entiers naturels, alors $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$ est un entier naturel :
 Vrai car $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{[(a+b)+(a-b)][(a+b)-(a-b)]}{4} = \frac{(2a)(2b)}{4} = ab \in \mathbb{N}$.

4 R.T.T.

(a) $x = 2$	(d) $y \leq -2$	(g) u et $v \in \mathbb{R}$
(b) $t = -\frac{6}{5}$	(e) $z \in \mathbb{R}$	(h) $\emptyset$
(c) $q \leq -\frac{2}{3}$	(f) $u < 1$ et $v \in \mathbb{R}$	(i) $x \geq 2$

(j) $x = \pm 1$	(p) $x \in]-3; 3[$	(v) $z \in]0; 2]$
(k) $x = \pm 4$	(q) $z = 2$	(w) $x \in]-\infty; 0[\cup]\frac{1}{3}; +\infty[$
(l) $\emptyset$	(r) $y = 1$ ou $y = -\frac{1}{3}$	(x) $t = \pm\sqrt{2}$
(m) $\emptyset$	(s) $u \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$	(y) $x \in]-4; 1[\cup]3; +\infty[$
(n) $] -\infty; -5] \cup [5; +\infty[$	(t) $x = 1$	(z) $p \in]0; 1]$
(o) $\emptyset$	(u) $x \leq -22$	

5 Last Fraction Hero

(a) $\frac{19}{12}$	(f) $\frac{8}{7}$	(j) $\frac{17a}{(2-3a)(7a+1)}$	(n) $\frac{41}{15}$
(b) $-\frac{11}{14}$	(g) 2	(k) $\frac{(3-11x)(x+1)}{x^2(x-1)(1-2x)}$	(o) $\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+2)}$
(c) $-\frac{17}{60}$	(h) $\frac{-1}{x(x-1)}$	(l) $\frac{y(7y+6)}{(3-2y)(y^2-y-4)}$	(p) $\frac{(x-2)(x+1)(6x+3)}{(x+2)(x-1)(6x-3)}$
(d) $\frac{14}{15}$	(i) $\frac{5x^2+9x-2}{3x(x-2)}$	(m) $\frac{13}{8}$	(q) 20
(e) $\frac{13}{42}$			

6 Le Factorisation

(a) $(3-u)^2$	(h) $(q+1)(q+3)$	(o) $3(2x-1)(13-6x)$
(b) $(7-2y)(7+2y)$	(i) $(2t+3)(t+2)$	(p) $(3u-1)(35-11u)$
(c) $(4x+5)^2$	(j) $(2A-2)(2A+8)$	(q) $(x\sqrt{3}-\sqrt{10}) \times (x\sqrt{3}+\sqrt{10})$
(d) $(2x-1)^2$	(k) $\varphi(\varphi-1)(\varphi+4)$	(r) $(2-n)(2+\frac{31}{4}n-4n^2)$
(e) $(x+4)(x+7)$	(l) $(1-2x)(1+2x)$	(s) $(5y-3)(3y+8)$
(f) $(x-3)(x+3)$	(m) $(t+5)(26-21t)$	
(g) $(2t-\frac{4}{3})(2t+\frac{4}{3})$	(n) $3(3z-8)(z+2)$	

7 La racine, c'est carré

Soit a un réel positif ou nul. La racine carrée de a est l'unique réel positif de carré valant a . Pour $a \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{a^2} = a$ et $\sqrt{a}$ est positif.

(a) $\sqrt{49} = 7$	(i) $\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$
(b) $-\sqrt{64} = -8$	(j) $\sqrt{(-9) \times (-4)} = \sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$
(c) $(-\sqrt{79})^2 = 79$	(k) $\sqrt{-9} \times \sqrt{-4}$ n'a aucun sens.
(d) $-\sqrt{127}^2 = -127$	(l) $\sqrt{32} = \sqrt{16}\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$
(e) $\sqrt{-25}^2$ n'a aucun sens.	(m) $\sqrt{72} = \sqrt{9}\sqrt{4}\sqrt{2} = 3 \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
(f) $\sqrt{36} + \sqrt{64} = 6 + 8 = 14$	(n) $\sqrt{300} = \sqrt{100}\sqrt{3} = 10\sqrt{3}$
(g) $\sqrt{36+64} = \sqrt{100} = 10$	(o) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{27} = \sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{9} = 2 \times 3 \times 3 = 18$
(h) $\sqrt{9 \times 4} = \sqrt{36} = 6$	
(p) $\sqrt{75} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{25}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{2} = 5 \times 3\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$	
(q) $\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{5} = 2 \times 3 \times 5 = 30$	
(r) $\sqrt{8} + \sqrt{12} + \sqrt{28} = \sqrt{4}\sqrt{2} + \sqrt{4}\sqrt{3} + \sqrt{4}\sqrt{7} = 2(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{7})$	
(s) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	

- (t) $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5\sqrt{3}}{5\sqrt{3}\sqrt{5}} + \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{5}\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}+3\sqrt{5}}{15}$
- (u) $\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{5}\sqrt{3}\sqrt{3}}{\sqrt{16}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{8}\sqrt{10}$
- (v) $\frac{\sqrt{84}}{\sqrt{175}} = \frac{\sqrt{4}\sqrt{3}\sqrt{7}}{\sqrt{25}\sqrt{7}} = \frac{2}{5}\sqrt{3}$
- (w) $x^2 - 9 = 0 \iff x^2 = 9 \iff x = -3 \text{ ou } x = 3$
- (x) $y^2 - 18 = 0 \iff y^2 = 18 \iff y = -\sqrt{18} = -\sqrt{9}\sqrt{2} = -3\sqrt{2} \text{ ou } y = 3\sqrt{2}$
- (y) $-3z^2 - 5 = 0 \iff z^2 = -\frac{5}{3}$ qui n'admet aucune solution réelle.
- (z) $3 - 5t^2 = 0 \iff t^2 = \frac{3}{5} \iff t = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{15}}{5} \text{ ou } t = \frac{\sqrt{15}}{5}$
- (α) Si $u^2 = 25$ alors $u = 5$: Faux (et -5 !)
- (β) La racine carrée de la somme de deux réels positifs égale la somme de leur racine carrée : Faux ($\sqrt{1+1} = \sqrt{2} \neq 2 = \sqrt{1} + \sqrt{1}$).
- (γ) La racine carrée du produit de deux réels égale le produit de leur racine carrée : Faux (et s'ils sont tous deux strictement négatifs?).
- (δ) La racine carrée d'un réel positif est inférieure ou égale à celui-ci : Faux (entre 0 et 1...)

8 Rester dans le cadre

- | | | |
|-------------------------------|--|--|
| (a) $7x + 3 \in [17; 38]$ | (d) $\frac{-5}{x+1} \in \left[-\frac{5}{3}; -\frac{5}{6}\right]$ | (g) $6xy \in]-90; 120]$ |
| (b) $1 - 4y \in [-15; 13[$ | (e) $-2y^2 \in [-32; 0]$ | |
| (c) $3x - 2y - 8 \in [6; 29[$ | (f) $x^2 - 2x + 1 \in [1; 16]$ | (h) $\frac{y}{x} \in \left]-\frac{3}{2}; 2\right]$ |

9 Sine Qua Tion

- (a) $x = 5 - y$ et $y = 5 - x$

(b) $u = v - 2$ et $v = u + 2$

(c) $a = \frac{2b+7}{3}$ et $b = \frac{3a-7}{2}$

(d) $\alpha = 3\beta - 5\gamma - 6$, $\beta = \frac{1}{3}(\alpha + 5\gamma + 6)$ et $\gamma = \frac{1}{5}(3\beta - \alpha - 6)$

(e) $A = \frac{5}{\frac{1}{2}B - \frac{1}{3}}$ et $B = \frac{\frac{1}{3}A + 5}{\frac{1}{2}A}$

(f) $f = \frac{2g}{3-4g}$ et $g = \frac{3f}{4f+2}$

(g) $u = \frac{d}{t} - 1$, $d = t(u+1)$ et $t = \frac{d}{u+1}$

(h) $a = \frac{7\frac{t}{x}-2}{\frac{3}{4}t}$, $t = \frac{2}{\frac{7}{x}-\frac{3}{4}a}$ et $x = \frac{7t}{\frac{3}{4}at+2}$

(i) $x = \frac{2yz+5}{3y+7yz}$, $y = \frac{5}{3x-2z+7xz}$ et $z = \frac{5-3xy}{7xy-2y}$

(j) $j = k^2 - 2$ et $k = \pm\sqrt{j+2}$

(k) $s = \frac{1}{7}((r-1)^2 - 3)$ et $r = 1 \pm \sqrt{7s+3}$

(l) $m = 2 \pm n$ et $n = \pm(m-2)$
- (m) $x > 3 - y$ et $y > 3 - x$

(n) $a < b - 4$ et $b > a + 4$

$$(o) \quad p \geq \frac{1}{5}(3q + 6) \quad \text{et} \quad q \leq \frac{1}{3}(5p - 6)$$

$$(p) \quad f \geq 2g + 1 \quad \text{et} \quad g \leq \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}$$

$$(q) \quad \begin{cases} u \leq -2v \text{ et } v > 0 \\ u \geq -2v \text{ et } v < 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v \leq -\frac{u}{2} \text{ et } v > 0 \\ v \geq -\frac{u}{2} \text{ et } v < 0 \end{cases}$$

$$(r) \quad \begin{cases} a > \frac{1}{b-1} \text{ et } b > 1 \\ a < \frac{1}{b-1} \text{ et } b < 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b > \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a > 0 \\ b < \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$$

3. Résolution par substitution, combinaison linéaire ou autre.

$$(s) \quad \begin{cases} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 4 + 2 = 6 \\ 2\beta = -3\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -\frac{3}{2} \times 6 = -9 \end{cases}$$

$$(t) \quad \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y) + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 3 - 1 \\ x = 1 + y \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{2} = 1 \\ x = 1 + 1 = 2 \end{cases}$$

$$(u) \quad \begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(3a + 2b - 4) - 3(2a - 3b) = 2 \times 0 - 3 \times 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 6a + 4b - 8 - 6a + 9b = -3 \\ 2a = 1 + 3b \end{cases} \iff \begin{cases} 13b = -3 + 8 \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3b) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = \frac{5}{13} \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3 \frac{5}{13}) = \frac{14}{13} \end{cases}$$

$$(v) \quad \begin{cases} 2u - 4v = 3u - 7v + 1 \\ 5u + 2v - 4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u - 2u = 7v - 4v - 1 \\ 5(3v - 1) + 2v - 4 = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = 3v - 1 \\ 17v = 1 + 4 + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} v = \frac{10}{17} \\ u = 3 \frac{10}{17} - 1 = \frac{13}{17} \end{cases}$$

$$(w) \quad \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6y = 7 + 4x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(2x - 3y) + (-4x + 6y) = 5 + 7 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x - 6y - 4x + 6y = 12 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \iff x, y \in \emptyset$$

$$(x) \quad \begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 4n = 2m + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 2m - 4n + 6 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2(m - 2n + 3) - (2m - 4n + 6) = 2 \times 0 - 0 \\ m = 2n - 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0m + 0n = 0 \\ m = 2n - 3 \end{cases} \iff n \in \mathbb{R} \text{ et } m = 2n - 3$$

$$(y) \quad \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x + y - 2 \\ 2x - y + (x + y - 2) = 4 \\ 3x + 2(x + y - 2) = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = x + y - 2 \\ 3x = 4 + 2 \\ 2y = 1 - 5x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{6}{3} = 2 \\ y = \frac{1}{2}(5 - 5 \times 2) = -\frac{5}{2} \\ z = 2 - \frac{5}{2} - 2 = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$(z) \quad \begin{cases} a + 2b + c = 4 \\ 2a - 3b + 5c = 0 \\ 3a - b + 2c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 4 - a - 2b \\ 2a - 3b + 5(4 - a - 2b) = 0 \\ 3a - b + 2(4 - a - 2b) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 4 - a - 2b \\ -3a - 13b = -20 \\ a - 5b = 1 - 8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 5b - 7 \\ c = 4 - (5b - 7) - 2b \\ 3(5b - 7) + 13b = 20 \end{cases} \iff \begin{cases} 28b = 20 + 21 \\ a = 5b - 7 \\ c = 4 + 7 - 7b \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{41}{28} \\ a = 5 \times \frac{41}{28} - 7 = \frac{9}{28} \\ c = 11 - 7 \times \frac{41}{28} = \frac{2}{4} \end{cases}$$

10 Entre parenthèses

$$A(x) = x + 4, \quad B(x) = 3x - 2, \quad C(x) = 7 - x \quad \text{et} \quad D(x) = 1 - 2x.$$

1. (a) $-4B(x) = 8 - 12x$

- (b) $C(x) - 3D(x) = 5x + 4$
(c) $-3A(x) - 5C(x) = 2x - 47$
(d) $A(x)B(x) = 3x^2 + 10x - 8$
(e) $C(x)D(x) = 2x^2 - 15x + 7$
(f) $A^2(x)D(x) = -2x^3 - 15x^2 - 24x + 16$
(g) $B(x)C(x) - A(x)D(x) = -x^2 + 30x - 18$
(h) $5B^2(x) - 4C^2(x) = 41x^2 - 4x - 176$
(i) $-5D^3(x) = 40x^3 - 60x^2 + 30x - 5$
(j) $B^4(x) = 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$
(k) $-2B(x)A^2(x) - 3C^2(x)D(x) = -131x^2 + 272x - 83$
(l) $\frac{A(x)}{B(x)C(x)} - \frac{B(x)}{C(x)D(x)} = \frac{-11x^2+5x}{6x^3-49x^2+51x-14}$
2. (m) $A(-6) = -2$ (p) $C^2(-1) = 64$
(n) $B(-4) = -14$ (q) $D^2(-\frac{3}{2}) = 16$
(o) $C(-3) - D(-4) = 1$ (r) $-3D(-1)C(-4)A(-5) = 99$
3. (s) $A(x^2) = x^2 + 4$ (x) $-2D^2(4 - 2x^2) = -32x^4 + 104x^2 - 98$
(t) $D(x + 1) = -2x - 1$ (y) $C(4 - x^2)D(2x + 4)$
(u) $B(3 - 2x) = 7 - 6x$ $= -4x^3 - 7x^2 - 12x - 21$
(v) $-4A(x - 3) = -4x - 4$ (z) $\frac{B(2x+1)-C(3x-1)}{A(x-1)D(3-4x)} = \frac{9x-7}{8x^2+17x-21}$
(w) $-3B(5 - 3x^2) = 27x^2 - 39$

11 Vous ?

(a) V	(e) V	(i) F	(m) V	(q) F	(u) F	(y) F	(β) F
(b) F	(f) F	(j) F	(n) V	(r) F	(v) F	(z) V	(γ) F
(c) V	(g) F	(k) V	(o) V	(s) F	(w) F	(α) V	(δ) F
(d) F	(h) F	(l) V	(p) F	(t) F	(x) F		

12 Qui est « in » qui est « out »

(a) V | (b) F | (c) V | (d) F | (e) V | (f) V | (g) F | (h) V | (i) V | (j) V

13 Affiner

Dans l'expression $f(x) = ax + b$, x est la variable dont dépend le nombre $f(x)$ tandis que a et b sont des paramètres, fixes pour chaque fonction. Lorsque $a \neq 0$, la racine de f est $-\frac{b}{a}$.

Fonction	Coeff. dir.	Ordo. Or.	Rac. év.
$\alpha(x) = 2x - 1$	2	-1	$\frac{1}{2}$
$\beta(x) = 3 - 5x$	-5	3	$\frac{3}{5}$
$\gamma(u) = -\frac{4u}{3} - \frac{5}{7}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{5}{7}$	$-\frac{21}{20}$
$\delta(y) = -6y$	-6	0	0
$\varepsilon(t) = 2$	0	2	$\emptyset$
$\zeta(z) = 3x + 2$	0	$3x+2$	$\emptyset^*$
$\eta(x) = ax + b$	a	b	$-\frac{b}{a}$
$\theta(x) = b + ax$	a	b	$-\frac{b}{a}$
$\iota(x) = bx + a$	b	a	$-\frac{a}{b}$
$\kappa(a) = ax + b$	x	b	$-\frac{b}{x}$
$\lambda(b) = ax + b$	1	ax	$-ax$
$\mu(z) = ax + b$	0	$ax+b$	$\emptyset^*$

Fonction	Coeff.	Ordo.	Racine
$\nu(x) = -mx + 2p$	$-m$	$2p$	$\frac{2p}{m}$
$\xi(a) = 2ax - 3b$	$2x$	$-3b$	$\frac{3b}{2x}$
$o(x) = fx$	f	0	0
$\pi(f) = x + f$	1	x	$-x$
$\rho(z) = m^2z + p^2$	m^2	p^2	$-\frac{p^2}{m^2}$
$\sigma(m) = m^2z + p^2$	non affine		
$\tau(p) = m^2z + 3p + 1$	3	m^2z+1	$-\frac{m^2z+1}{3}$
$v(x) = 3x - 4d - cx$	$3 - c$	$-4d$	$\frac{4d}{3-c}$
$\varphi(x) = \frac{ax}{b}$	$\frac{a}{b}$	0	0
$\chi(x) = \frac{3}{x}$	non affine		
$\psi(t) = 5 - \frac{2}{x}$	0	$5 - \frac{2}{x}$	$\emptyset^*$
$\omega(x) = Xx + X$	X	X	-1

* : sauf cas très particulier où l'ordonnée à l'origine est nulle aussi. La fonction est alors identiquement nulle et tout réel en est racine.

14 R.T.T. : le retour

(α) $x = -2$	(ι) $v = \pm\sqrt{7}$	(ρ) $a \in]-2; 3[$
(β) $c = \frac{3}{2}$	(κ) $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$	(σ) $x \leq -\frac{4}{3}$ ou $x \geq \frac{11}{2}$
(γ) $y \geq -\frac{9}{2}$	(λ) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$	(τ) $b \in [-5; 4]$
(δ) $z \geq \frac{1}{6}$	(μ) $\emptyset$	(ν) $q \in]-22; 3]$
(ε) $t < 1$	(ν) $x = 1$ ou $x = 2$	(φ) $p < \frac{3}{2}$
(ζ) $u > 1$	(ξ) $p = -1$ ou $p = -\frac{5}{2}$	(χ) $w \in]3; 7[$
(η) $0 < x \leq \frac{15}{2}$	(o) $r < -1$ ou $r > 1$	(ψ) $\ell \in \mathbb{R}$
(θ) $y < -\frac{14}{3}$ ou $y > 0$	(π) $x \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$	(ω) $x < -7$ ou $x > -1$

15 À la dérive

$a'(x) = 33 - 42x$	$f'(x) = \frac{-12x^4 + 12x^3 - 30x^2 + 60x - 11}{(2x^3 - 4x + 5)^2}$
$b'(x) = 3x^2(-27x^6 + 56x^5 + 25x^2 + 32x - 56)$	$g'(x) = \frac{-4}{\sqrt{5-8x}}$
$c'(x) = -2(9x^2 - 71x + 102)$	$h'(x) = \frac{-28x}{(9-4x^2)\sqrt{9-4x^2}}$
$d'(x) = \frac{-15}{(6-5x)^2}$	$i'(x) = \frac{-300x^7 + 810x^6 - 432x^5 + 205x^4 - 984x^3 + 714x^2 - 4x - 6}{(6-5x)^4}$
$e'(x) = \frac{19}{(7-3x)^2}$	

16 Hélène & Eudes

1. (a) $e^{-x}e^2 = e^{2-x}$.
- (b) $(e^x)^3 e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$.
- (c) $\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} = e^{(x-1)-(x+2)} = e^{-3}$.
- (d) $\frac{e^{3u-2}e^{7-3u}}{e^{3-u}e^{u+2}} = e^{(3u-2+7-3u)-(3-u+u+2)} = e^0 = 1$.

2. (a) $(e^x + e^{-2x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x e^{-2x} + (e^{-2x})^2 = e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}$
 (b) $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x) = (e^{-2x})^2 - (e^x)^2 = e^{-4x} - e^{2x}$
 (c) $(e^{3x} - e^{5x})^2 = (e^{3x})^2 - 2e^{3x}e^{5x} + (e^{5x})^2 = e^{6x} - 2e^{8x} + e^{10x}$
3. (a) $e^{x^2} = e^{-x} \stackrel{\times e^x}{\iff} e^{x^2} e^x = e^{-x} e^x \iff e^{x^2+x} = 1 = e^0 \iff x^2 + x = 0$
 $\iff x = 0 \text{ ou } x = -1.$
 (b) $e^{2x} < e^x \stackrel{e^x > 0}{\iff} \frac{e^{2x}}{e^x} < 1 \iff e^{2x-x} < e^0 \iff x < 0.$
 (c) $e^{2x^2+3} = e^{7x} \iff e^{2x^2+3-7x} = e^0 \iff 2x^2 - 7x + 3 = 0 \iff x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$
 (d) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}} \iff x + 1 = \frac{2}{x} \stackrel{x \neq 0}{\iff} x^2 + x - 2 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -2.$
 (e) $3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \stackrel{y=e^x > 0}{\iff} 3y^2 + y - 4 = 0 \iff y = 1 = e^0 \text{ ou } y = -\frac{4}{3} < 0 \implies x = 0.$
 (f) $e^x \leq e^{x^2-12} \iff e^{x^2-12-x} \geq e^0 \stackrel{\text{exp strict. } \nearrow}{\iff} x^2 - x - 12 \geq 0$
 $\iff x \in]-\infty; -3] \cup [4; +\infty[.$

4. Pour $x > 0$,

$$a'(x) = (e^{2x+1})' = (2x+1)'e^{2x+1} = 2e^{2x+1}.$$

$$b'(x) = (e^{-x} + \sqrt{e^{2x}})' = e^{-x} - e^{-x} \text{ avec } \sqrt{e^{2x}} = \sqrt{(e^x)^2} = |e^x| = e^x.$$

$$c'(x) = [(x+1)e^{-x}]' = (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' = 1e^{-x} + (x+1)(-1)e^{-x} = -xe^{-x}.$$

$$d'(x) = [xe^{\sqrt{x}}]' = x'e^{\sqrt{x}} + x[e^{\sqrt{x}}]' = e^{\sqrt{x}} + x[\sqrt{x}]'e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} + x\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}(1 + \frac{\sqrt{x}}{2}).$$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x-1}\right)' = \frac{(e^x)'(e^x-1) - e^x(e^x-1)'}{(e^x-1)^2} = \frac{(e^x)(e^x-1) - e^x e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}.$$

$$g'(x) = \left(e^{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1(1+x) - 1(1-x)}{(1+x)^2} e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)^2} e^{\frac{1-x}{1+x}}.$$

5. (a) $\frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}} = \frac{8}{2^3} = 1.$
 (b) $\ln(3) + \ln(\frac{1}{3}) = \ln(3) - \ln(3) = 0.$
 (c) $\ln(\sqrt{2}+1) + \ln(\sqrt{2}-1) = \ln[(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)] = \ln(2-1) = \ln(1) = 0.$
 (d) $\ln(4) - \ln(9) - 5\ln(2) + 2\ln(3) + \ln(8)$
 $= 2\ln(2) - 2\ln(3) - 5\ln(2) + 2\ln(3) + 3\ln(2) = 0.$
 (e) $\frac{1}{2}\ln(16) - \frac{3}{2}\ln(4) + \ln(9) + \frac{1}{3}\ln(8) - \frac{1}{2}\ln(81)$
 $= \frac{1}{2}\ln(2^4) - 3\ln(\sqrt{4}) + \ln(3^2) + \frac{1}{3}\ln(2^3) - \ln(\sqrt{81})$
 $= \frac{4}{2}\ln(2) - 3\ln(2) + 2\ln(3) + \frac{3}{3}\ln(2) - \ln(3^2) = 0\ln(2) + 0\ln(3) = 0$
 (f) $\ln(e^{a-b}) - e^{\ln(a)} + \exp(\ln(b)) = (a-b) - a + b = 0$
 (g) $\exp(\ln(a) + \ln(b)) - \exp(\ln(a) - \ln(b)) = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} - \frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = ab - \frac{a}{b}$
 (h) $\ln(\frac{a}{b}) - \ln(a^2) + \ln(\sqrt{b}) + \frac{3}{2}\ln(\frac{a^2}{\sqrt{b}})$
 $= \ln(b) - \ln(a) - 2\ln(a) + \frac{1}{2}\ln(b) + \frac{3}{2} \cdot 2\ln(a) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\ln(b) = \frac{3}{4}\ln(b)$
 (i) $\ln(a^2b) - \ln(b^2a) + \ln(\frac{b}{a^3}) + 2\ln(\frac{b}{a}) - \frac{1}{2}\ln(a^4b^6)$
 $= 2\ln(a) + \ln(b) - 2\ln(b) - \ln(a) + \ln(a) - 3\ln(b) + 2\ln(b) - 2\ln(a) - \frac{4}{2}\ln(a) - \frac{6}{2}\ln(b)$
 $= -2\ln(a) - 5\ln(b)$
 (j) $\frac{3\ln(\frac{b}{a}) + \ln(a^3) - \ln(\sqrt{b})}{\ln(\frac{b}{a}) - 2\ln(\sqrt{b}) - \ln(\frac{1}{a^7})} = \frac{3\ln(b) - 3\ln(a) + 3\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(b)}{\ln(b) - \ln(a) - 2\frac{1}{2}\ln(b) + \frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{\frac{5}{2}\ln(b)}{\frac{1}{2}\ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Chapitre 1

Raisonnements

Sommaire

1	Éléments de logique	22
1.1	Quantificateurs	22
1.2	Propositions	22
1.3	Implication	24
1.4	Équivalence	25
1.5	Connecteurs logiques	26
2	Différents raisonnements	27
2.1	Raisonnement direct	27
2.2	Raisonnement par équivalence	27
2.3	Raisonnement par construction	27
2.4	Raisonnement visuel	27
2.5	Raisonnement par disjonction des cas	28
2.6	Raisonnement par contraposition	28
2.7	Raisonnement par négation	28
2.8	Raisonnement par analyse-synthèse	28
2.9	Raisonnement par l'absurde	29
2.10	Raisonnement par récurrence	29
Exercices		31
	Corrigé des exercices	34
Travaux Pratiques : Booboole		45
	Corrigé du T.P. : Booboole	46

Ce premier chapitre de l'année pourrait d'être qualifié d'un peu formel mais il nous est bien essentiel d'avoir les bases du raisonnement mathématique afin de rédiger correctement et de ne pas faire d'erreurs logiques.

1 Éléments de logique

1.1 Quantificateurs

Définition 1.1

- Le symbole $\forall$ est le **quantificateur universel** et signifie « **pour tout** » ou « **quel que soit** ».
- Le symbole $\exists$ est le **quantificateur existentiel** et signifie « **il existe** » au moins un(e). Lui adjoindre un ! signifie qu'il est unique.

Exemples : ◦ « $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$ » signifie « Pour tout réel x , x^2 est positif ou nul ».

Cette affirmation est vraie.

◦ « $\exists x \in \mathbb{R}, x < 0$ » signifie « Il existe au moins un réel strictement négatif ».

Cette affirmation est vraie.

◦ « $\exists! z \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, z = t^2$ » signifie « Il existe un unique réel z tel que, pour tout réel t , $z = t^2$ ». Cette affirmation est fausse.

◦ L'affirmation « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} x \leq y$ » signifie « Pour tout réel x , il existe un réel y tel que $x \leq y$ ». Cette affirmation est vraie.

◦ L'affirmation « Il existe un réel y , tel que, pour tout réel x , $x \leq y$ » s'écrit « $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} x \leq y$ ». Cette affirmation est fausse.

◦ « $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall \beta \in \mathbb{R}, \exists \gamma \in \mathbb{R}, \gamma = \beta - 3\alpha$ » signifie « Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, il existe un unique réel γ tel que $\gamma = \beta - 3\alpha$ ». Cette affirmation est vraie.

Remarques : • Nous verrons que les quantificateurs sont très utiles pour formuler de façon précise des énoncés et leur négation mais attention à ne pas surtout les utiliser à des fins d'abréviation. Cela mène souvent à des erreurs.

• L'expression « il existe » signifie donc toujours implicitement qu'il en existe au moins un. L'unicité sera explicitement mentionnée le cas échéant. Pour démontrer l'existence et l'unicité d'un objet, on procède généralement en deux temps. On montre d'une part que de tels objets existent et d'autre part, on en prend deux et l'on montre qu'ils sont identiques.

• Deux quantificateurs universels qui se suivent commutent, tout comme deux quantificateurs existentiels. En revanche, les deux quantificateurs $\forall$ et $\exists$ ne commutent généralement pas entre eux (cf. ex. précédent) :

En général, la proposition $(\forall x, \exists y, \text{propriété}(x, y))$ est différente de $(\exists y, \forall x, \text{propriété}(x, y))$.

1.2 Propositions

Définition 1.2 Une proposition $\mathcal{P}$ est une affirmation qui peut être vraie ou fausse, mais qui ne peut être vraie et fausse en même temps et ne peut être ni vraie ni fausse en même temps. Une proposition pourra être notée $\mathcal{P}(x)$ si elle dépend d'une variable x .

On écrira généralement « $\mathcal{P}$ est vraie » mais on pourra se contenter de « $\mathcal{P}$ ».

Exemples : Considérons les trois propositions suivantes :

- $\mathcal{P}_1 : \langle x + 2 = 2 + x \rangle$.
 - $\mathcal{P}_2 : \langle 2 \times 3 = 7 \rangle$.
 - $\mathcal{P}_3 : \langle x^2 = 9 \rangle$.
- La proposition $\mathcal{P}_1$ est toujours vraie.
 - La proposition $\mathcal{P}_2$ est toujours fausse.

• La proposition $\mathcal{P}_3$ peut être vraie ou fausse suivant les valeurs de x : si $x = 3$, elle est vraie, si $x = -3$, elle est vraie et elle est fausse dans tous les autres cas.

■ Exercice 1.1 (N1) Les trois propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

- $\mathcal{P}_4$: « $x - 2$ est strictement plus grand que x ».
- $\mathcal{P}_5$: « $2x$ est plus grand ou égal à x ».
- $\mathcal{P}_6$: « le carré d'un nombre pair est pair ».

■ Exercice 1.2 (N1) Ces affirmations sont-elles des propositions ? Dépendent-elles d'une variable ?

- (a) $\ln(x) > 0$. (b) La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante. (c) $3x + 2e^y$.

■ Exercice 1.3 (N1) Énoncer une affirmation non mathématique qui n'est pas une proposition.

■ Exercice 1.4 (N2) Dans les propositions suivantes, quelles sont les variables dépendant des autres ? Quelles sont alors les propositions vraies ?

- $\mathcal{Q}$: « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x > y$. »
- $\mathcal{R}$: « $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y$. »
- $\mathcal{S}$: « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, y \leq z < x$. »
- $\mathcal{T}$: « $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R}, z \leq xy$. »
- $\mathcal{U}$: « $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{R}, \exists t \in \mathbb{R}, x \leq z \leq y \leq t$. »

Définition 1.3 La négation d'une proposition $\mathcal{P}$, notée « non $\mathcal{P}$ » ou « $\neg \mathcal{P}$ », est une proposition qui est fausse lorsque $\mathcal{P}$ est vraie et qui est vraie lorsque $\mathcal{P}$ est fausse.

Remarque : La proposition $\neg(\neg \mathcal{P})$ est précisément $\mathcal{P}$.

■ Exercice 1.5 (N2) Établir la négation des propositions $\mathcal{P}_1$ à $\mathcal{P}_6$. Sont-elles toujours vraies ?

■ Exercice 1.6 (N2) Établir la négation des propositions suivantes. Lesquelles sont vraies ?

- $\mathcal{P}_7$: $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 > 0$.
- $\mathcal{P}_8$: $\exists b \in \mathbb{R}_+, b - 3 < 0$.
- $\mathcal{P}_9$: $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \leq y$.
- $\mathcal{P}_{10}$: $\exists \alpha \in \mathbb{R}_+, \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta^2 - \alpha < 0$.
- $\mathcal{P}_{11}$: Les quatre numéros obtenus lors de ces lancers de dé sont pairs.

Et l'on observe que la négation d'un quantificateur universel abouti à un quantificateur existentiel et vice-versa. On n'utilisera donc pas de « quantificateur non-existential » comme $\nexists$ même s'il peut être utile d'en passer par là dans sa tête ou au brouillon. Par exemple, une proposition affirmant que personne ne mesure plus de trois mètres se traduit par la taille de toute personne est inférieure ou égale à trois mètres.

Propriété 1.1 La négation de la proposition $(\forall x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\exists x, \neg \mathcal{P}(x))$. La négation de la proposition $(\exists x, \mathcal{P}(x))$ est la proposition $(\forall x, \neg \mathcal{P}(x))$.

Pour démontrer la négation de $(\forall x, \mathcal{P}(x))$, il suffit donc de déterminer un x pour lequel $\mathcal{P}$ est fausse. Un tel x est appelé un contre-exemple.

Exemples :
 ◦ La proposition « Pour tout réel x , si $x \leq 3$, alors $x^2 \leq 9$ » est fausse. En effet, pour $x = -5 \in \mathbb{R}$, on a $x \leq 3$ et $x^2 > 9$.

◦ Les propositions $\mathcal{P} : \forall x \in \emptyset, x \geq 3$, $\mathcal{Q} : \forall x \in \emptyset, x < 3$ et $\mathcal{R} : \forall x \in \emptyset, x$ est orange, sont toutes les trois vraies. En effet, il n'existe pas d'élément appartenant au vide vérifiant, et donc ne vérifiant pas, une quelconque propriété.

■ Exercice 1.7 (N2) On rappelle qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est dite paire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ et qu'elle est dite impaire si $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x)$. Étudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1+e^x}{1+e^{-x}}$.

Pour conclure ce paragraphe de manière troublante, on précise qu'il est démontré que dans toute axiomatique, il existe toujours des propositions *indécidables*, dont on ne peut affirmer si elles sont vraies ou fausses (réfléchissez un peu à l'affirmation « je mens »). C'est un fameux résultat du mathématicien Kurt Gödel (1906-1978) et je ne peux que vous conseiller de lire *La Déesse des petites victoires*, brillant roman de Yannick Grannec autour de ce personnage.

1.3 Implication

Définition 1.4 Pour affirmer que « si $\mathcal{P}$ (est vraie), alors $\mathcal{Q}$ (est vraie) », on dit que « $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$ » et l'on écrit $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

$\mathcal{P}$ est la condition suffisante (l'hypothèse) et $\mathcal{Q}$ est la condition nécessaire (la conclusion) :

Si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, alors il suffit d'avoir $\mathcal{P}$ pour avoir $\mathcal{Q}$ et il est nécessaire d'avoir $\mathcal{Q}$ pour avoir $\mathcal{P}$.

Exemples : ◦ Si $\underbrace{x=3}_{\mathcal{P}}$, alors $\underbrace{x^2=9}_{\mathcal{Q}}$. Il suffit que $x=3$ pour que $x^2=9$ et il est nécessaire d'avoir $x^2=9$ pour que $x=3$.

◦ Si $\underbrace{\overline{AB}=\overline{CD}}_{\mathcal{P}}$, alors $\underbrace{ABDC \text{ est un parallélogramme}}_{\mathcal{Q}}$.

Remarque : Attention, l'implication n'est pas une relation de causalité. Par exemple, l'assertion « les oiseaux volent donc la neige est blanche » est fausse mais l'implication « si les oiseaux volent alors la neige est blanche » est vraie. N'allons pas plus loin, nous risquerions d'être déconcertés.

■ Exercice 1.8 (N2) Dans chaque cas, quelle est la condition nécessaire et quelle est la suffisante ?

- (a) $\mathcal{P}: x \geq 0, \quad \mathcal{Q}: x > 0$.
- (b) $\mathcal{P}: \forall y \in \mathbb{R}, f(y) \geq 2, \quad \mathcal{Q}: \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
- (c) $\mathcal{P}: \forall x, \exists y, x - y > 0, \quad \mathcal{Q}: \exists a, \forall b, a - b < 0$.

Définition 1.5

L'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée l'implication réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

L'implication $\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}$ est appelée la contraposée de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

L'implication $\text{non } \mathcal{P} \Rightarrow \text{non } \mathcal{Q}$ est donc la contraposée de la réciproque de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

■ Exercice 1.9 (N1) VouF ?

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$	$\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$	$\neg \mathcal{P} \Rightarrow \neg \mathcal{Q}$
n est premier	$n = 3$				
$x \in \mathbb{D}$	$x \in \mathbb{Q}$				
$ab = 9$	$a = 3$ et $b = 3$				
$x \geq 2$	$x \geq 3$				
$x > 0$	$x \geq 0$				
$x < 0$	$x^3 < 0$				
$\alpha > 2$	$\alpha \leq 1$				

Le résultat suivant sera souvent utile pour démontrer des résultats.

Propriété 1.2

Si l'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie, alors sa contraposée $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$ est vraie.

- Exercice 1.10 (N2) Quelle est la contraposée de l'implication $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$?

Ainsi, la réciproque de la propriété 1.2 est vraie.

1.4 Équivalence

Définition 1.6

Deux propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont dites équivalentes si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

On note alors $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ et l'on a $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie.

Si $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire et suffisante à $\mathcal{P}$, et vice-versa.

Exemples : $\circ \underbrace{x = 3}_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \underbrace{2x = 6}_{\mathcal{Q}}$.

$\circ$ Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre $[AB]$.

$\underbrace{M \text{ est un point de } \mathcal{C} \text{ différent de } A \text{ et } B}_{\mathcal{P}}$ si, et seulement si, $\underbrace{\widehat{AMB} = 90^\circ}_{\mathcal{Q}}$.

- Exercice 1.11 (N2) Donner un exemple d'implication qui n'est pas une équivalence.

Attention à ne surtout pas confondre « égalité » et « équivalence ».

Par exemple, $2 - 4x + 7 + 6x = 9 + 2x$ et $2x = 8 \Leftrightarrow 3x = 12$.

- Exercice 1.12 (N1) Préciser si les implications et équivalences suivantes sont vraies ou fausses.

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
Je vis en France	Je vis en Europe			
Je suis majeur	J'ai 19 ans			
$CDEF$ parallélogramme	$CDEF$ carré			
MNP rectangle en M	$MP^2 + MN^2 = NP^2$			
$x \in \mathbb{N}$	$x \in \mathbb{Z}$			
$a + b = 5$	$a = 2$ et $b = 3$			
$4x - (x - 5) = 11$	$x = 2$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ et $cx + d = 0$			
$(ax + b)(cx + d) = 0$	$ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$			

Pour démontrer une équivalence, on pourra procéder par équivalences successives ou par double implication, dans les sens direct et réciproque, en usant de méthodes différentes pour chacun.

- Exercice 1.13 (N3) Pour tout $A \subset \mathbb{R}$, la fonction caractéristique de A est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que, pour tous sous-ensembles A et B de $\mathbb{R}$, on a $A = B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A = \mathbb{1}_B$.

La propriété 1.2 et les remarques afférentes amènent le résultat suivant.

Propriété 1.3

L'implication $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ et sa contraposée $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$ sont équivalentes.

Quand les équivalences s'enchaînent, il n'est pas nécessaire de toutes les démontrer :

Pour démontrer que $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q} \iff \mathcal{R}$, on pourra montrer $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q} \implies \mathcal{R} \implies \mathcal{P}$.

1.5 Connecteurs logiques

Définition 1.7 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- La disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$), le « ou » étant inclusif (l'un, l'autre ou les deux).
- La conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est la proposition ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) (l'un et l'autre simultanément).

Vous comprenez enfin pourquoi un mathématicien répond « Oui » lorsqu'on lui demande s'il est droitier ou gaucher.

■ Exercice 1.14 (N2) Établir la négation des propositions suivantes.

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|
| (a) Il fait beau et chaud. | (d) $1 < y \leq 4$. |
| (b) La lumière est rouge ou verte. | (e) f est strictement positive. |
| (c) $x \leq 2$ ou $x > 5$. | (f) La fonction g est croissante. |

Propriété 1.4

- La négation de la disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est conjonction de la négation de $\mathcal{P}$ et de la négation de $\mathcal{Q}$: $\neg(\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q}) \iff (\neg\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q})$.
- La négation de la conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est disjonction de la négation de $\mathcal{P}$ et de la négation de $\mathcal{Q}$: $\neg(\mathcal{P} \text{ et } \mathcal{Q}) \iff (\neg\mathcal{P} \text{ ou } \neg\mathcal{Q})$.

■ Exercice 1.15 (N2) Relier les propositions équivalentes puis les propositions contraires.

- | | | |
|------------------------------|----------------------------------|---|
| (a) i. Beau $\implies$ Chaud | (b) i. $x > 0 \implies x \geq 0$ | (c) i. $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ |
| ii. Beau et Froid | ii. $x > 0 \not\equiv x \geq 0$ | ii. $\neg\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ |
| iii. Mauvais ou Chaud | iii. $x \leq 0$ ou $x \geq 0$ | iii. $\mathcal{P}$ et $\neg\mathcal{Q}$ |
| iv. Beau $\not\equiv$ Chaud | iv. $x > 0$ et $x < 0$ | iv. $\mathcal{P} \not\equiv \mathcal{Q}$ |

Propriété 1.5 Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions.

- Les propositions $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ et $(\neg\mathcal{P} \text{ ou } \mathcal{Q})$ sont équivalentes.
- La négation de la proposition $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ est la proposition $(\mathcal{P} \text{ et } \neg\mathcal{Q})$.
- En particulier, $\neg(\forall x, \mathcal{P}_x \implies \mathcal{Q}_x) \iff (\exists x, \mathcal{P}_x \text{ et } \neg\mathcal{Q}_x)$

Par exemple, la proposition $\forall(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, (x \neq y \text{ et } z \neq t) \implies x - z \neq y - t$ est fausse. En effet, $3 \neq 4, 1 \neq 2$ et $3 - 1 = 4 - 2$ donc il existe $(x, y, z, t) = (3, 4, 1, 2) \in \mathbb{R}^4$ tel que $(x \neq y \text{ et } z \neq t)$ et $x - z = y - t$: la négation de cette proposition est donc vraie.

■ Exercice 1.16 (N2) Établir la négation des propositions suivantes.

- (a) $x \geq 3 \implies x^2 > 5$.
- (b) $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > 0 \implies y > 0$.
- (c) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 3 \implies x > 0$.
- (d) $\forall a \in \mathcal{D}_f, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

■ Exercice 1.17 (N2) VouF ?

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 3 \implies x \geq 4.$</p> <p>(b) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha^2 > 4 \implies \alpha \geq 2.$</p> | <p>(c) $\forall u \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}, u^2 = v^2 \implies u = v.$</p> <p>(d) $\forall c \in \mathbb{R}, \forall r \in \mathbb{R}, c = r^2 \implies r = \sqrt{c}.$</p> |
|--|--|

2 Différents raisonnements

Ce paragraphe présente les différents types de raisonnements mathématiques. Vous les avez sûrement déjà pratiqués mais peut-être pas formulés.

2.1 Raisonnement direct

Raisonnement linéaire dans lequel on effectue généralement un calcul ou l'on applique des théorèmes après avoir vérifié leurs hypothèses. Il est important de préciser que pour démontrer un énoncé commençant par $\forall x \in \mathcal{D}$, on débute par « Soit $x \in \mathcal{D}$. » On choisit donc un x indéterminé dans l'ensemble d'étude avant de commencer la démonstration directe.

■ Exercice 1.18 (N1) Montrer que le carré de l'opposé du double de tout nombre réel égale le quadruple de son carré.

2.2 Raisonnement par équivalence

Ce type de raisonnement consiste à transformer une proposition en une succession de propositions équivalentes dont la dernière est trivialement vraie. Attention à ce que les équivalences ne soient pas de simples implications sous peine de ne plus pouvoir remonter le raisonnement (penser à $x^2 = 9 \not\Rightarrow x = 3 \dots$).

■ Exercice 1.19 (N1) Montrer la proposition $\mathcal{P}: \forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x^2 + 2x + 1} \geq 1.$

2.3 Raisonnement par construction

Ce type de raisonnement consiste à exhiber, à construire, un exemple de l'objet recherché, typiquement dans le cas où la proposition commence par « il existe ».

Exemple : Soit la proposition « Il existe au moins un individu grand, beau, fort, intelligent et affable ».

Il suffit alors d'exhiber votre professeur de mathématiques bien-aimé pour en achever la démonstration.

■ Exercice 1.20 (N1) Le carré d'un nombre réel peut-il être strictement inférieur à celui-ci ?

2.4 Raisonnement visuel

Ce type de raisonnement consiste à construire une figure faisant foi.

■ Exercice 1.21 (N1) Démontrer visuellement les identités suivantes pour des réels positifs ($a \geq b$).

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $c(a + b) = ca + cb$ • $c(a - b) = ca - cb$ • $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ | <ul style="list-style-type: none"> • $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ • $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ • $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ |
|---|---|

2.5 Raisonnement par disjonction des cas

Celui-ci consiste à séparer les différents cas de figure et les démontrer séparément, en utilisant différents raisonnements et calculs.

■ Exercice 1.22 (N1) Montrer que le carré de tout nombre réel est positif ou nul.

2.6 Raisonnement par contraposition

Ce type de raisonnement consiste à démontrer la contraposée d'une implication, celle-ci étant alors démontrée d'après la proposition 1.3.

■ Exercice 1.23 (N2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, a < b + \varepsilon) \implies a \leq b$.

2.7 Raisonnement par négation

Ce type de raisonnement consiste à prouver que la négation d'une proposition est fausse, celle-ci étant alors vraie. Par contraposition, on peut montrer qu'une proposition est fausse en démontrant que sa négation est vraie. C'est alors souvent l'occasion de manifester son art du contre-exemple. En effet, $\mathcal{P} \text{ vraie} \iff \neg \mathcal{P} \text{ fausse}$ et $\mathcal{P} \text{ fausse} \iff \neg \mathcal{P} \text{ vraie}$.

■ Exercice 1.24 (N1) La proposition $\mathcal{P}: \forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2} = x$ est-elle vraie ?

2.8 Raisonnement par analyse-synthèse

Ce type de raisonnement consiste à montrer l'existence (et l'unicité) d'un objet en supposant son l'existence, l'expliciter par déductions puis montrer qu'il vérifie bien les conditions demandées.

Exemple : La recherche des extremums d'une fonction se fait souvent par analyse-synthèse : on détermine d'abord la liste des points qui auraient le droit d'être minimiseurs ou maximiseurs en utilisant des conditions nécessaires d'optimalité (dérivée, tableau de variations,...). Ensuite, on regarde lesquels parmi ceux-ci le sont vraiment en comparant leurs valeurs.

■ Exercice 1.25 (N2) Montrons que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. Analyse : Supposons qu'il existe deux fonctions p et i définies sur $\mathbb{R}$ telles que p est paire, i est impaire et $f = p + i$.
 - (a) Exprimer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ et $f(-x)$ en fonction de $p(x)$ et $i(x)$.
 - (b) En déduire les expressions de $p(x)$ et $i(x)$ en fonction de $f(x)$ et $f(-x)$.
 - (c) Qu'a-t-on démontré ?
2. Synthèse :
 - (a) Montrer que les fonctions p et i telles que définies précédemment vérifient les conditions demandées.
 - (b) Qu'a-t-on démontré ?
3. Conclure.

2.9 Raisonnement par l'absurde

Peut-être le plus beau raisonnement qui soit. Il consiste à louvoyer dans le faux, en le sachant ou en espérant que ce soit le cas, afin d'aboutir à une contradiction patente. On en conclut alors que la supposition était bien erronée. Plus précisément, si l'on veut démontrer que $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$, on montre qu'il est absurde d'avoir à la fois $\mathcal{P}$ et $\neg \mathcal{Q}$.

■ Exercice 1.26 (N1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}, \quad \frac{x+5}{x-3} \neq 1$.

2.10 Raisonnement par récurrence

C'est le type de raisonnement sur lequel nous allons le plus insister dans ce chapitre.

■ Exercice 1.27 (N1) Soient les deux propriétés définies pour $n \in \mathbb{N}$ par

$\mathcal{P}(n)$: « La somme des n premiers entiers impairs est un carré parfait »

et $\mathcal{Q}(n)$: « L'entier $n^2 + n + 41$ est un nombre premier ».

1. Tester la véracité de ces deux propositions pour quelques premiers entiers.
2. Et pour $n = 40$?
3. Après avoir lu ce paragraphe, émettre une conjecture pour $\mathcal{P}(n)$ puis la démontrer.

Axiome du principe de récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$.

On suppose que l'on a les deux assertions suivantes :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie (*hérédité*).

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ (*conclusion*).

Imaginons un escalier infini dont on a numéroté dans l'ordre chacune des marches. Si l'on peut accéder à une marche n_0 de l'escalier (*initialisation*) et si l'on peut monter d'une marche quelconque à la suivante (*hérédité*), alors on peut accéder à n'importe quelle marche au-dessus de n_0 (*conclusion*).

On peut aussi imaginer une succession infinie de dominos dressés. Il nous est bien évident que si l'on en fait basculer un (*initialisation*) et si les dominos sont espacés les uns à la suite des autres d'une distance adéquate (*hérédité*), alors tous les suivants basculeront, dans une amusante et colorée cataracte (*conclusion*).

Une telle démonstration aurait été pour la première fois utilisé explicitement par Blaise Pascal en 1665 mais il faudra attendre deux siècles pour une formalisation et une axiomatisation du raisonnement par récurrence par, indépendamment, l'allemand Dedekind et l'italien Péano en 1888.

Remarque importante : La phase d'initialisation est essentielle.

En effet, si par exemple $\mathcal{P}(n)$ est la propriété « 10^n est multiple de 9 », on a $10^n = 9 \times k$ implique $10^{n+1} = 10^n \times 10 = 9 \times (k \times 10)$ et l'on a bien $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$: la propriété est héréditaire mais elle est évidemment fausse pour tout n .

Exemple :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}(n)$ la proposition « Pour tout réel positif x , $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».
Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

- Initialisation : Pour $n = 0$, on a $(1+x)^0 = 1 \geq 1+0x$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence.

On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{1+x>0}{\overset{\mathcal{P}(n)}{\geq}} (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

• Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à partir du rang 0 donc, par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .

■ Exercice 1.28 (N1) Montrer que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{3u_n-2}{u_n}$ est constante.

Remarque : Dans l'étude de l'hérédité, on ne suppose surtout pas que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n , sinon il n'y a plus rien à prouver. On suppose qu'elle est vraie pour un certain entier n seulement. Parfois, il sera nécessaire de supposer $\mathcal{P}(n)$ vraie pour deux entiers consécutifs n et $n+1$ afin de montrer qu'elle est vraie pour le suivant qui est $n+2$. C'est ce que l'on appelle une récurrence double. Parfois même, on a besoin d'une récurrence triple. Dans le cas où l'on a besoin de tous les premiers termes, on parle de récurrence forte.

Propriété 1.6 Récurrence d'ordre p et récurrence forte

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel n et soit $p \in \mathbb{N}^*$.

• Si les p premières propositions $\mathcal{P}(0), \mathcal{P}(1), \dots, \mathcal{P}(p-1)$ sont vraies (initialisation) et si en supposant les p propositions $\mathcal{P}(n), \mathcal{P}(n+1), \dots, \mathcal{P}(n+p-1)$ vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on démontre que la proposition $\mathcal{P}(n+p)$ est vraie (hérédité), alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (conclusion).

• Si la proposition $\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation) et si en supposant que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, les propositions $\mathcal{P}(k)$ sont vraies pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie (hérédité), alors la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (conclusion).

■ Exercice 1.29 (N2) Récurrence double

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0, u_1 = 1, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1, u_n \in \mathbb{N}^*$.

■ Exercice 1.30 (N2) Récurrence forte

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1, u_{n+1} = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

Montrer que la propriété $\mathcal{P}(n): u_n \leq 2^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par élégance, on fera attention à ne pas utiliser de récurrence double, triple, d'ordre p ou forte lorsqu'une simple suffit. De surcroît, si l'on n'a pas utilisé l'hypothèse de récurrence dans la démonstration de l'hérédité, c'est que l'on a fait faux ou que la récurrence n'était pas nécessaire (le *ou* est inclusif).

■ Exercice 1.31 (N2) Montrer que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = -1, u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$ vérifie $u_n = 3^n - 2^{n+1}$ pour tout entier n .

Exercices

Exercice 1.32 (N2) Parmi les propositions suivantes, lesquelles n'ont aucun sens, lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

- | | |
|--|--|
| (a) $\exists p \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{R}, p + q = q + 2p.$ | (d) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x + y = y + x.$ |
| (b) $\exists m \in \mathbb{Z}, n + m = 2n + 3.$ | (e) $\forall u \in \mathbb{R}, \exists! v \in \mathbb{R}, u \leq v.$ |
| (c) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \exists \beta \in \mathbb{R}, \alpha = \beta^2.$ | (f) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R}, x + 1 \leq a^2 + b^2.$ |

Exercice 1.33 (N2)

- Exprimer en termes de quantificateurs les phrases suivantes puis déterminer leur véracité. Les corriger si elles sont fausses.
 - Il existe un réel supérieur ou égal à tous les autres.
 - Chaque réel admet un double.
 - L'inverse de tout réel est unique.
 - L'opposé de tout réel est négatif ou nul.
 - Si l'on se donne deux réels, il existe un réel strictement compris entre eux deux.
- Exprimer de manière littérale les propositions suivantes puis déterminer leur véracité. Les corriger si elles sont fausses.

- | | |
|--|--|
| (a) $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k \text{ ou } n = 2k + 1.$ | (c) $\exists! y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = 2x + 1.$ |
| (b) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! n \in \mathbb{N}, n \leq x < n + 1.$ | (d) $\forall a \in \mathbb{R}_+, a^2 + 3 \in \mathbb{R}_+.$ |

Exercice 1.34 (N1)

- Définir une fonction paire (respectivement impaire).
- Les fonctions suivantes sont-elles paires (respectivement impaires) ?

(a) $f(x) = \frac{7-3x^2}{1+2x^4}$ sur $\mathbb{R}$. (b) $g(x) = 4x^3 - \frac{-2+x^2}{5x}$ sur $\mathbb{R}^*$. (c) $h(x) = \frac{-x^2-2x+1}{3+5x^6}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.35 (N2)

- Définir une fonction croissante (respectivement décroissante) sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
- Les fonctions suivantes sont-elles croissantes (respectivement décroissantes) ? Utiliser la définition.

(a) $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$. | (b) $g(x) = -|x|$ sur $\mathbb{R}$. | (c) $h(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 1.36 (N1) Énoncer la contraposée, la réciproque, la contraposée de la réciproque de la proposition $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ puis la négation de ces quatre propositions.

Exercice 1.37 (N1) Énoncer le théorème de Pythagore, sa contraposée, sa réciproque, la contraposée de sa réciproque ainsi que chacune de leur négation.